बीजगणित

हिन्दी समिति
सूचना विभाग, उत्तर प्रदेश
लखनऊ

बीजगणित

हिन्दी समिति-ग्रंथमाला—१६०

बीजगणित

[बी० ए० एवं बी० एस-सी० कक्षाओं के विद्यार्थियों के हेतु]

लेखक

प्रो० रामकुमार

पी० एच-डी०, डी० एस-सी०, एफ० एन० ए० एस-सी०

मोतीलाल नेहरू क्षेत्रीय इंजीनियरी कॉलेज

प्रयाग

हिन्दी समिति

सूचना विभाग, उत्तर प्रदेश

लखनऊ

प्रकाशकीय

भारतीय विश्वविद्यालयों की बी० ए० तथा बी० एस-सी० की कक्षाओं के उन छात्रों के लिए, जो राष्ट्रभाषा हिन्दी के माध्यम से गणितीय विषयों का अध्ययन करते हैं, ऐसी पाठ्य-पुस्तकों की परम आवश्यकता है जिनमें सम्बन्धित विषयों का प्रतिपादन अधिकारी विद्वानों द्वारा किया गया हो। ऐसी पाठ्य-पुस्तकों में सरल, सुबोध और प्रभावपूर्ण भाषा का प्रयोग अपेक्षित है। हिन्दी समिति इस प्रकार की पुस्तकों को प्रकाशित करने के लिए विशेष रूप से प्रयत्नशील है। प्रस्तुत पुस्तक बीजगणित के एक ऐसे मान्य विद्वान् द्वारा लिखी गयी है जो स्नातक कक्षाओं में गणितीय विषयों के अध्यापन से सम्बन्धित हैं। इसमें उपयुक्त उदाहरणों द्वारा विषय का सम्यक् बोध कराया गया है जिससे कि छात्रों के लिए बीजगणित का अध्ययन और अभ्यास सुकर हो सके। हमें आशा है कि यह पुस्तक गणित के विद्यार्थियों में विशेष लोकप्रिय होगी।

लीलाधर शर्मा 'पर्वतीय'
सचिव, हिन्दी समिति

प्राक्कथन

बीजगणित की यह पाठ्य पुस्तक उत्तर प्रदेशीय शासन की हिन्दी समिति की प्रकाशन योजना के अन्तर्गत भारतीय विश्वविद्यालयों के बी० ए० एवं बी० एस-सी० कक्षाओं के विद्यार्थियों के हेतु लिखी गयी है। पुस्तक की भाषा को सरल, सुबोध तथा प्रवाहयुक्त बनाने का पूर्ण प्रयत्न किया गया है। साथ ही विषय का विवेचन ऐसे ढंग से किया गया है जिससे कि यह विश्वविद्यालयों में हिन्दी माध्यम द्वारा पठन-पाठन की दृष्टि से उपयोगी सिद्ध हो सके। मुझे प्रसन्नता है कि हिन्दी समिति, उत्तर प्रदेश ने मुझे बीजगणित की इस पुस्तक को लिखने का अवसर प्रदान किया।

पुस्तक में प्रयुक्त पारिभाषिक शब्द केन्द्रीय हिन्दी निदेशालय, शिक्षा मंत्रालय, भारतीय शासन, द्वारा प्रकाशित 'पारिभाषिक शब्द-संग्रह' (अंग्रेजी-हिन्दी) से लिये गये हैं। पाठकों की सुविधा के लिए पुस्तक के अन्त में इन शब्दों की सूची हिन्दी-अँग्रेजी एवं अँग्रेजी-हिन्दी दे दी गयी है।

इस पुस्तक को लिखने में जिन मूल ग्रंथों एवं पाठ्य पुस्तकों की सहायता ली गयी है उनके लेखकों का मैं आभारी हूँ। मैं कॉलेज के अधिकारियों का भी कृतज्ञ हूँ जिन्होंने कॉलेज की ओर से पुस्तक लिखने की अनुमति प्रदान की और समय-समय पर आवश्यक प्रोत्साहन भी दिया।

रामकुमार

विषय-सूची

अध्याय 1

द्विपद-प्रमेय

1·1. द्विपद-प्रमेय बीजगणित के अति उपयोगी प्रमेयों में से एक है। इसकी सहायता से $(x+a)^n$ के समरूप व्यंजकों का विस्तार x अथवा a की आरोही श्रेणी में कर सकते हैं जब कि n कोई धन, ऋण, पूर्ण सांख्यिक अथवा भिन्नात्मक घातांक है।

1·2. द्विपद-प्रमेय–धन पूर्ण सांख्यिक घातांक : हम सर्व प्रथम द्विपद-प्रमेय को गणित आगमन के द्वारा सरलतम स्थिति, अर्थात, जब कि n धन पूर्ण सांख्यिक घातांक है, में सिद्ध करेंगे।

कल्पना करो कि

$$(x+a)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1 x^{n-1} a + {}^nC_2 x^{n-2}\, a^2 + \ldots$$
$$\ldots + {}^nC_r\, x^{n-r}\, a^r + \ldots + {}^nC_n\, a^n. \qquad \ldots (1)$$

विस्तार (1) के दोनों पक्षों को $(x+a)$ से गुणा करने पर प्राप्त होता है:

$$(x+a)^{n+1} = (x+a)\ ({}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}\, a + {}^nC_2\, x^{n-2}\, a^2 + \ldots$$
$$\ldots + {}^nC_r\, x^{n-r}\, a^r + \ldots + {}^nC_n\, a^n),$$
$$= {}^nC_0\, x^{n+1} + ({}^nC_1 + {}^nC_0) x^n a + ({}^nC_2 + {}^nC_1) x^{n-1}\, a^2 +$$
$$\ldots + ({}^nC_r + {}^nC_{r-1})\, x^{n-r+1}\, a^r + \ldots + {}^nC_n\, a^{n+1},$$
$$= x^{n+1} + {}^{n+1}C_1 x^n\, a + {}^{n+1}C_2\, x^{n-1}\, a^2 + \ldots$$
$$+ {}^{n+1}C_r\, a^{n+1-r}\, a^r,$$
$$+ \ldots + a^{n+1},$$

क्योंकि $\quad {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r,$

$${}^nC_0 = 1 = {}^nC_n.$$

स्पष्टतया $(x+a)^{n+1}$ का विस्तार $(x+a)^n$ के विस्तार के समरूप है तथा n के स्थान पर $(n+1)$ प्रतिस्थापित कर प्राप्त किया जा सकता है। अतः, यदि (1) घातांक के किसी विशेष मान n के लिए सत्य है, तो वह $(n+1)$ के लिए भी सत्य होगा।

परन्तु हम गुणा करके देख सकते हैं कि

$$(x+a)^2=(x+a)\,(x+a)={}^2C_0\,x^2+{}^2C_1\,xa+{}^2C_2\,a^2,$$
$$(x+a)^3=(x+a)\,(x+a)^2={}^3C_0\,x^3+{}^3C_1\,x^2a+{}^3C_2\,xa^2+{}^3C_3\,a^3;$$

अर्थात्, (1) घातांक $n=2,3$ के लिए सत्य है।

अतएव (1) घातांक $n=4$ के लिए भी सत्य है; इत्यादि। अतः गणित आगमन से (1) किसी भी धन पूर्ण सांख्यिक घातांक के लिए सत्य होगा।

विस्तार (1) में ${}^nC_1$, ${}^nC_2$, . . . इत्यादि का मान प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है ।

$$(x+a)^n=x^n+nx^{n-1}.a+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2+\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}x^{n-r}a^r+\ldots+a^n. \quad \ldots(2)$$

विस्तार (2) को धन पूर्णसांख्यिक घातांक का द्विपद-प्रमेय कहते हैं।

विस्तार (2) में a के स्थान पर $-a$ प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$(x-a)^n=x^n-ax^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\,a^2+\ldots$$
$$+(-1)^r\frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}\,x^{n-r}a^r+\ldots(-1)^na^n. \quad \ldots(3)$$

द्विपद-प्रमेय का मानक रूप

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}x^r+\ldots+x^n$$

है और यह विस्तार (2) से सरलतर एवं उपयोगी है।

1·21. विशेषतायें : यदि हम §1.2 में प्राप्त $(1+x)^n$ के विस्तार की प्रेक्षा करें तो निम्नलिखित महत्व पूर्ण विशेषतायें विदित होती हैं:—

(i) विस्तार में पद-संख्या $(n+1)$ है।

(ii) विस्तार का $(r+1)^{th}$ पद ${}^nC_r\,x^r$ है। इसको व्यापक पद कहते हैं और इसके सामान्यतः T_{r+1} से सूचित करते हैं ।

(iii) विस्तार के पद ${}^nC_r\,x^r$ और ${}^nC_{n-r}\,x^{n-r}$ प्रारम्भ और अंत से समदूरस्थ हैं क्योंकि ${}^nC_r\,x^r$ के पूर्वगत पद की संख्या r एवं अनुवर्ती पद की संख्या

$n-r$ हैं, जब कि ${}^nC_{n-r}\ x^{n-r}$ के पूर्वगत पद की संख्या $n-r$ एवं अनुवर्ती पद की संख्या r है। इन दो पदों के गुणांक भी समान हैं क्योंकि

$$ {}^nC_r = {}^nC_{r-1}\ . $$

अतः आरम्भ और अन्त से समदूरस्थ पदों के गुणांक समान होते हैं।

(iv) यदि n सम हो, तो विस्तार में पद-संख्या विषम होती है और केवल एक मध्य पद होता है; परन्तु यदि n विषम हो, तो पद संख्या सम होती है और दो मध्य पद होते हैं।

(v) किसी पद में x का घातांक शून्य रखने पर x से स्वतंत्र पद प्राप्त हो जाता है।

(vi) विस्तार में महत्तम गुणांक, n के सम अथवा विषम होने के अनुसार, ${}^nC_{n/2}$ अथवा ${}^nC_{(n-1)/2}$ हैं क्योंकि, n के सम अथवा विषम होने के अनुसार, ${}^nC_r$, $r=\frac{n}{2}$ अथवा $r=(n-1)/2$ के लिए महत्तम होता है।

(vii) यदि $(n+1)\,x/\,(1+x)$ पूर्ण संख्या k है, तो विस्तार में दो महत्तम पद $T_k=T_{k+1}$ होते हैं परन्तु यदि $(n+1)\,x/\,(1+x)$ पूर्ण संख्या नहीं है और इसका सांख्यिक भाग l है, तो विस्तार में केवल एक महत्तम पद T_{l+1} होता है, क्योंकि r^{th} और $(r+1)^{th}$ पद के संख्यात्मक मान T_r और T_{r+1} का अनुपात

$$ \frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{n-r+1}{r}x $$

है ।

(viii) व्यंजक $(1+x)^n$ के विस्तार में x के घातांकों के गुणांक को द्विपद गुणांक कहते हैं और इनको सामान्यतः $C_0, C_1, C_2, \ldots C_n$ से सूचित करते हैं। यह सरलता से दिखाया जा सकता है कि (a) द्विपद गुणांकों का योगफल 2^n, (b) द्विपद गुणांकों के वर्ग का योगफल ${}^{2n}C_n$ एवं (c) विषम पदों के गुणांकों का योगफल सम पदों के गुणांकों के योगफल के बराबर होता है।

1·22. उदाहरण : (i) 999^4 *का मान ज्ञात करो।*

$$
\begin{aligned}
999^4 &= (1000-1)^4,\\
&= (10^3-1)^4,\\
&= 10^{12}-4.10^9+6.10^6-4.10^3+1,\\
&= 996,\ 005,\ 996,\ 001.
\end{aligned}
$$

(ii) दिखाओ कि $(1+x)^{2n}$ के विस्तार का मध्य पद

$$=\frac{1.3.5...(2n-1)}{n!}(2x)^n$$

क्योंकि $(1+x)^{2n}$ में घातांक $2n$ है; इसके विस्तार में $(2n+1)$ पद होंगे और मध्य पद $(n+1)^{th}$ पद होगा।

$\therefore$ वांछित मध्य पद

$$={}^{2n}C_n x^n,$$

$$=\frac{(2n)!}{n!\,.n!}x^n,$$

$$=\frac{2n(2n-1)(2n-2)...3.2.1}{n!\;.\;n!}x^n,$$

$$=\frac{\{2n(2n-2)...4.2\}\{(2n-1)(2n-3)...3.1\}}{n!\;.\;n!}x^n,$$

$$=\frac{2^n\,n!\;(2n-1)(2n-3)...3.1}{n!\;.\;n!}x^n,$$

$$=\frac{(2n-1)(2n-3)...3.1}{n!}(2n)^n,$$

(iii) $(2+3x)^8$ के विस्तार का महत्तम पद ज्ञात करो जबकि $x=1/2$।

क्योंकि व्यंजक

$$(2+3x)^8=2^8\left(1+\frac{3x}{2}\right)^8,$$

अतः $(1+3x/2)^8$ के विस्तार का महत्तम पद ज्ञात करना पर्याप्त है।

यदि अब इसके r^{th} पद को, जब कि $x=1/2$, T_r से सूचित करें, तो

$$T_{r+1}={}^8C_r\;(3x/2)^r=\frac{8!}{r!\,(8-r)!}(3/4)^r, \text{ जब कि } x=1/2,$$

$$T_r={}^8C_{r-1}\;(3x/2)^{r-1}=\frac{8!}{(r-1)!\,(9-r)!}(3/4)^{r-1} \text{ जबकि } n=1/2$$

और
$$\frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{3(9-r)}{4r}.$$

अतएव $$T_{r+1} \gtreqless T_r ,$$

जब कि $$3(9-r) \gtreqless 4r ,$$

अथवा, जब कि $$27 \gtreqless 7r ,$$

अथवा, जब कि $$r \gtreqless 27/7 , = 3+6/7 .$$

अतः T_4 महत्तम पद है और इसका संख्यात्मक मान, जब कि $x=1/2$,

$$= {}^8C_3 \ (3/4)^3 = 189/8.$$

अतः $(2+3x)^8$ का महत्तम पद

$$= 2^8 \cdot 189/8,$$

$$= 6048.$$

(iv) यदि $(1+x)^n$ के विस्तार में गुणांकों को $C^0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ से निरूपित किया जाय, तो सिद्ध करो : कि

$$\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{4}C_3 + \frac{1}{6}C_5 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n = \frac{2^n - 1}{(n+1)} .$$

द्विपद गुणांकों का मान रखने पर व्यंजक

$$\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{4}C_3 + \frac{1}{6}C_5 + \ldots + \frac{1}{n+1} C_n$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{4.3!} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{6 \ . 5!} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n+1} ,$$

$$= \frac{1}{n+1} \Big[-1+1+\frac{(n+1) \ (n)}{2!} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!} +$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{6!} + \ldots + 1 \Big] ,$$

$$= \frac{1}{n+1} \left[-1 + {}^{n+1}C_0 + {}^{n+1}C_2 + {}^{n+1}C_4 + \cdots + {}^{n+1}C_{n+1} \right] ,$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[-1+\tfrac{1}{2}\ .\ 2^{n+1}\right],$$

$$=(2^n-1)/(n+1).$$

(v) सिद्ध करो कि

$$C_0^2-C_1^2+C_2^2-\ldots+(-1)^n C_n^2$$

$=o$, जब कि n विषम है;

$=\dfrac{(-1)^{n/2}\, n!}{\{(n/2)!\}^2}$, जब कि n सम है।

हमें ज्ञात है कि

$$(1-x)^n=C_0-C_1 x+C_2 x^2-\ldots+(-1)^n C_n x^n., \quad \ldots (1)$$

$$(1+x)^n=C_n+C_{n-1} x+C_{n-2} x^2+\ldots+C_0\ x^n. \quad \ldots (2)$$

विस्तार (1) और (2) को गुणा कर दक्षिण पक्ष से x^n के गुणांक संग्रह करने पर प्राप्त होता है:

$$C_0^2-C_1^2+C_2^2-\ldots+(-1)^n C_n^2$$

$=(1-x^2)^n$ के विस्तार में x^n का गुणांक,

$=o$, जब कि n विषम है;

$=(-1)^{n/2}\ {}^nC_{n/2}$,

$=\dfrac{(-1)^{n/2}.\ n!}{\{(n/2)!\}^2}$, जब कि n सम है।

प्रश्नावली

1. द्विपद-प्रमेय की सहायता से a के घातांकों में विस्तार करो:

(i) $(x+2y)^5$. (ii) $(1-1/x)^{10}$.

(iii) $(x\sqrt{y}+(2/3)\sqrt{xy})^6$. (iv) $(\sqrt{(x/y)}-\sqrt{(y/x)})^6$.

2. सरल करो:

(i) $(x+a)^6+(x-a)^6$. (ii) $(\sqrt{2}+1)^4+(\sqrt{2}-1)^4$.

(iii) $(a+ib)^5+(a-ib)^5$.

(iv) $\{x+\sqrt{(x^2-a^2)}\}^5-\{\sqrt{(x^2-a^2)}-x\}^5$.

3. मान ज्ञात करो :

(i) 101^2. (ii) 99^4.

ज्ञात करो :

4. $(2x+3)^{10}$ के द्विपद-विस्तार का 5^{th} पद।

5. $(x^{3/2}\, y^{1/2} - x^{1/2}\, y^{3/2})^{10}$ के द्विपद-विस्तार का 8^{th} पद।

6. $(ax - by)^{14}$ के द्विपद-विस्तार का $(r+1)^{th}$ पद।

7. $(x/a - a/x)^{2n}$ के द्विपद-विस्तार का $(r+1)^{th}$ पद।

8. द्विपद-विस्तार में x से स्वतंत्र पद ज्ञात करो :

(i) $\left(2x+\frac{x^2}{3}\right)^9$. (ii) $(x - 1/x^2)^{3n}$

9. द्विपद-विस्तार का मध्यपद ज्ञात करो :

(i) $(x+1/x)^{10}$. (ii) $(a/x+bx)^{12}$.

10. निम्नलिखित व्यंजकों के विस्तार में कौन-सा पद महत्तम है ? इसका मान भी ज्ञात करो।

(i) $(1+x)^6$ जब कि $x=1/2$।

(ii) $(5a+2x)^{10}$ जब कि $x=2, a=1$।

यदि $(1+x)^n$ के विस्तार में गुणांकों को $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ से निरूपित किया जाय, तो मान बताओ :

11. $2C_0+C_1+2C_2+C_3+2C_4+C_5+\cdots$

12. $C_0+2C_1+3C_2+\ldots+(n+1)C_n$. [रंगून, 1950]

13. $\frac{C_1}{C_0}+\frac{2C_2}{C_1}+\frac{3C_3}{C_2}+\ldots+\frac{nC_n}{C_{n-1}}$.

14. $C_0+1/2C_1+1/2C_2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n$. [दिल्ली, 1950]

15. $C_0-1/2C_1+1/3C_2-\ldots+\frac{(-1)^n C_n}{n+1}$.

16. $1.2C_2+2.3C_3+3.4C_4+\ldots+(n-1)nC_n$.

17. $C_0+2C_1+4C_2+6C_3+\ldots+2nC_n$.

18 $C_2+2C_3+3C_4+\ldots+(n-1)C_n$.

19. $2C_0+\frac{2^2 C_1}{2}+\frac{2^3C_2}{3}+\ldots+\frac{2^{n+1}C_n}{n+1}$.

20. यदि n समपूर्ण संख्या हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{1!\,(n-1)!}+\frac{1}{3!\,(n-3)!}+\frac{1}{5!\,(n-5)!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}=\frac{2^{n-1}}{n!}$$

1·3. द्विपद-प्रमेय–कोई घातांक : पूर्वगत अनुच्छेद में हमने देखा है कि यदि n धन एव पूर्ण सांख्यिक हो, तो श्रेणी

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}x^r+\ldots,$$

$(n+1)$ पदों के पश्चात् समाप्त हो जाती है और व्यंजक $(1+x)^n$ का विस्तार है। परन्तु जब n धन एवं पूर्ण सांख्यिक नहीं है, तो श्रेणी समाप्त नहीं होती और इसमें पद संख्या अनंत है।

उदाहरणार्थ, (1) में $n=-1/2$ रखने पर प्राप्त श्रेणी

$$1-1/2x+\frac{1.3}{2.4}x^2-\ldots+(-1)^r\frac{1.3.5.\ldots(2r-1)}{2.4.6.\ldots 2r}x^r+\ldots\ldots \quad (1)$$

एक अनंत श्रेणी है।

प्रत्यक अनंत श्रेणी का अर्थ होना आवश्यक नहीं है। जैसा कि हम अध्याय 6 में देखेंगे कि केवल अभिसारी श्रेणी को ही कोई अर्थ दिया जा सकता है और जब x का संख्यात्मक मान एक से कम होता है, (1) अभिसारी श्रेणी है। यह दिखाया जा सकता है कि, x के इन मान के लिए, (1) परम अभिसारी श्रेणी भी है।

अब हम प्रमाणित करेंगे कि श्रेणी (1) द्विपद $(1+x)^n$ का विस्तार है जब कि n धन अथवा ऋण, भिन्न अथवा पूर्ण संख्या है; परंतु यह तब ही सत्य है जब कि (1) परम अभिसारी श्रेणी है और अतएव x का संख्यात्मक मान एक से कम है।

1·31. वांण्डर मोण्ड का प्रमेय : यदि m और n कोई दो संख्याएं और r धन पूर्ण संख्या हो, तो

$$(m+n)_r=(m)_r+{}^rC_1\,(m)_{r-1}\,(n)_1+{}^rC_2\,(m)_{r-2}\,(n)_2+\ldots+(n)_r$$

इसमें

$$m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-r+1)$$

को $(m)_r$ से निरूपित किया गया है।

हमें ज्ञात है कि, m और n के धन पूर्ण-सांख्यिक मान के लिए,

$$(1+x)^m=1+\frac{(m)_1}{1!}x+\frac{(m)_2}{2!}x^2+\ldots+\frac{(m)_r}{r!}x^{(r)}+\ldots, \qquad (2)$$

तथा $(1+x)^n=1+\frac{(n)_1}{1!}x+\frac{(n)_2}{2!}x^2+...+\frac{(n)_r}{r!}x^r+.......$ (3)

स्पष्टतया (2) और (3) के दक्षिण पक्षीय श्रेणी के गुणनफल में x^r का गुणांक $(1+x)^{m+n}$ के विस्तार में x^r के गुणांक के बराबर होगा। अतः, इन मान को समीकृत करने पर

$$\frac{(m+n)_r}{r!}=\frac{(m)_r}{r!}+\frac{(m)_{r-1}}{(r-2)!}\cdot\frac{(n)_1}{1!}+\frac{(m)_{r-2}}{(r-2)!}\frac{(n)_2}{2!}+...$$
$$+\frac{(m)_1}{1!}\frac{(n)_{r-1}}{(r-!)!}+\frac{(n)_r}{r!}.$$

दोनों पक्षों को $r!$ से गुणा करने पर प्राप्त होता है

$$(m+n)_r=(m)_r+{}^rC_1\,(m)_{r-1}\,(n)_1+{}^rC_2\,(m)_{r-2}\,(n)_2+...$$
$$...+{}^nC_{r-1}\,(m)_1\,(n)_{r-1}+(n)_r. \qquad ...(4)$$

यह m और n के सम्पूर्ण धन पूर्ण सांख्यिक मान के लिए सत्य है। परंतु प्रत्येक पक्ष m और n में समान घात का परिमित व्यंजक है। अतएव (4) सर्वसमिका होनी चाहिए; अर्थात्, यदि गुणनफल $(m+n)_r$ का पूर्ण विस्तार लिख कर उसको m के घातांकों में व्यवस्थित किया जाय, तो प्रत्येक पद दूसरे पक्ष के संगत पद के बराबर होगा। अतः समीकरण (4) m और n के समस्त मान के लिए सत्य है।

1·32. प्रमेय : *यदि n कोई, धन अथवा ऋण, पूर्ण सांख्यिक अथवा भिन्नात्मक, संख्या हो तथा x का संख्यात्मक मान एक से कम हो, तो श्रेणी*

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+...+\frac{n(n-1)\,(n-2)...(n-r+1)}{r!}x^r+...$$

का योगफल $(1+x)^n$ *होता है।*

यदि पूर्वोक्त विस्तार को $f(n)$ से निरूपित किया जाय, तो

$$f(n)=1+\frac{(n)}{1!}x+\frac{(n)_2}{2!}x^2+...+\frac{(n)_r}{r!}x^r+...,$$

और

$$f(m)=1+\frac{(m)}{1!}x+\frac{(m)_2}{2!}x^2+...+\frac{(m)_r}{r!}x^r+...,$$

दोनों श्रेणियों को गुणा कर x के घातांकों में व्यवस्थित करने पर प्राप्त होता है

$$f(m)\,.\,f(n)=1+k_1\,x+k_2\,x^2+...+k_r\,x^r+...,$$

जिसमें $k_r = \frac{(m)_r}{r!} + \frac{(m)_{r-1}\,(n)_1}{(r-1)!} + \cdots + \frac{(n)_r}{r!}$,

$= \frac{(m+n)_r}{r!}$, वाँण्डर मोण्ड के प्रमेय से।

अतएव

$$f(m)\,.\,f(n) = 1 + \frac{(m+n)_1}{r!}\,x + \frac{(m+n)_2}{2!}\,x^2 + \ldots$$
$$\frac{(m+n)_r}{r!}\,x^r + \ldots ,$$
$$= f(m+n).$$

इसी भाँति

$$f(m)\,.\,f(n)\,.\,f(p) = f(m+n+p)\,.$$

पूर्वगत विधि के पुनरावृत्त अनुप्रयोग से दिखाया जा सकता है कि परिणाम (2) संख्या में परिमित समस्त गुणन-खण्डों के लिए सत्य है।

अब हम निम्नवर्ती दो प्रत्यक्ष स्थिति पर विचार करेंगे :

प्रथम स्थिति : यदि n धन भिन्नात्मक घातांक p/q है तथा p और q धन पूर्ण संख्या हैं, तो पूर्वोक्त से प्राप्त होता है

$$f\ (p/q)\,.\,f\ (p/q)\ldots q \text{ गुणन खंड तक}$$
$$= f\,\{(p/q)\cdot q\} = f\ (p).$$

परन्तु, क्योंकि p एक धन पूर्ण संख्या है, अतएव

$$\{f\ (p/q)\}^q = (1+x)^p,$$

अर्थात् ,

$$f\ (p/q) = (1+x)^{p/q}.$$

द्वितीय स्थिति : यदि $n = -m$ और m कोई धन पूर्ण राशि अथवा भिन्न है; तो

$$f\ (m)\,.\,f(-m) = f\ (o) = 1.$$

परंतु प्रथम स्थिति से

$$f\ (m) = (1+x)^m.$$

अतएव

$$f\ (-m) = \frac{1}{f\ (m)} = \frac{1}{(1+x)^m} = (1+x)^{-m}$$

अतः n के समस्त मान के लिए

$$f(n)=(1+x)^n,$$

अर्थात, द्विपद-प्रमेय n के समस्त मान, धन अथवा ऋण, पूर्ण सांख्यिक अथवा भिन्नात्मक, के लिए सत्य है।

1·33. विशेष स्थितियाँ :

$$\text{(i)}\ (x+a)^n=a^n(1+x/a)^n=a^n+\frac{(n)_1}{1!}a^{n-1}x+\frac{(n)_2}{2!}a^{n-2}x^2+\ldots$$

$$+\frac{(n)_r}{r!}a^{n-1}x^r+\ \ldots(1)$$

$$=x^n(1+a/x)^n=x^n+\frac{(n)_1}{1!}x^{n-1}a+\frac{(n)_2}{2!}x^{n-2}a^2$$

$$+\ldots+\frac{(n)_r}{r!}x^{n-r}a^r+\ldots,\ (2)$$

जब कि (1) और (2) में क्रमशः x/a अथवा a/x का संख्यात्मक मान एक से कम है और n कोई घातांक है।

$$\text{(ii)}\ (1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\ldots+$$

$$\frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{r!}x^r+\ldots\ \ldots(3)$$

द्विपद $(1+x)^{-n}$ का विस्तार (1) के समरूप होता है; केवल पद एकान्तरतः धन और ऋण होते हैं।

परिणाम (3) में x और n के विशेष मान लेने पर प्राप्त होता है :

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^r+\ \ldots,$$
$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^rx^r+\ \ldots,$$
$$(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(r+1)x^r+\ \ldots,$$
$$(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+\ldots+(-1)^r(r+1)x^r+\ldots,$$

इन विस्तारों को स्मरण रखना अति उपयोगी है।

1·34. महत्तम पद : *द्विपद $(1+x)^n$ के विस्तार में संख्यात्मक महत्तम पद ज्ञात करना, जब कि $|x|<1$ और n परिमेय है।*

कल्पना करो कि x धन है। इस कल्पना में कोई त्रुटि नहीं है क्योंकि हम पदों के केवल संख्यात्मक मान पर विचार कर रहे हैं।

अब हम निम्नवर्ती दो प्रत्यक्ष स्थिति पर विचार करेंगे :

प्रथम स्थिति : जब n धन है तथा T_r और T_{r+1} द्विपद $(1+x)^n$ के विस्तार के r^{th} और $(r+1)^{th}$ पद हैं; तो

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{n-r+1}{r}x = \left(\frac{n+r}{r} - 1\right)x$$

अतएव $\qquad T_{r+1} \gtreqless T_r,$

जब कि $\quad \{(n+r)/(r-1)\}\, x \gtreqless 1,$

अर्थात् , $\quad (n+1)\, x \gtreqless (1+x)\, r,$

अर्थात् , $\quad r \gtreqless (n+1)\, x/(1+x),$

अब यदि $(n+1)\, x/(1+x)$ एक पूर्ण संख्या k है, तो §1·4 की प्रथम स्थिति की भाँति, $T_k = T_{k+1}$ दो महत्तम पद हैं।

परंतु यदि $(n+1)\, x/(1+x) = k +$ एक भिन्न, तो r का महत्तम मान k है और T_{k+1} महत्तम पद है।

द्वितीय स्थिति : जब n ऋण है और $n = -m$; तो m धन होगा और

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{-m-r+1}{r}x = -\left(\frac{m-1}{r} + 1\right)x,$$

यदि $m<1$, तो $\left(\frac{m-1}{r} + 1\right)x$ धनात्मक उचित भिन्न होगी और, r के समस्त मान के लिए, संख्यानुसार $T_{r+1} < T_r$, अर्थात्, पदों का संख्यात्मक मान उत्तरोत्तर घटता जाता है। अतएव प्रथम पद अधिकतम पद है।

यदि $m=1$, तो भी $T_{r+1} < T_r$ क्योंकि $|x| < 1$ । अतएव, इस दशा में भी प्रथम पद महत्तम पद होगा।

यदि $m<1$, तो संख्यानुसार,

$$T_{r+1} \gtreqless T_r,$$

जब कि $\quad \left(\frac{m-1}{r} + 1\right)x \gtreqless 1,$

अर्थात्, $\quad (m-1)x \gtreqless (1-x)r,$

अर्थात्, $$r \gtrless \frac{(m-1)x}{1-x}.$$

अतः, प्रथम स्थिति की भाँति $T_k = T_{k+1}$ महत्तम पद होंगे

जब कि $$\frac{(m-1)x}{1-x} = \text{पूर्ण संख्या } k,$$

और T_{k+1} महत्तम पद होगा

जब कि $$\frac{(m-1)x}{1-x} = R + \text{एक उचित भिन्न।}$$

1·35. विशेषतायें : यदि हम § 2.3 में प्राप्त $(1+x)^n$ के विस्तार की प्रेक्षा करें तो निम्नलिखित महत्वपूर्ण विशेषतायें विदित हो जाती हैं :

(i) यदि n भिन्नात्मक है, तो $(1+x)^n$ के एक से अधिक मान होंगे। परन्तु §2.3 के (1) में $x=o$ रख कर देख सकते हैं कि द्विपद श्रेणी का योगफल $(1+x)^n$ का वास्तविक धन मान है।

(ii) कोई संख्या किन्हीं दो संख्याओं के अनुपात में तब ही अभिव्यक्त की जा सकती है जब कि n परिमेय हो। अतः § 2.3 का प्रमाण केवल परिमेय घातांकों के लिए सत्य है। परंतु § 2.3 के श्रेणी (1) से निरूपित फलन के सातत्य के कारण द्विपद-प्रमेय अपरिमेय घातांकों के लिए भी सत्य होगा।

1·36. उदाहरण : *(i) यदि x का संख्यात्मक मान एक से कम हो, तो $(3x^2-2)/(x+x^2)$ के विस्तार में x^r का गुणांक ज्ञात करो।*

$$\frac{3x^2-2}{x^2+x} = \frac{3x^2-2}{x(1+x)},$$

$$= (3x-2/x)\ (1+x)^{-1},$$

$$= (3x-2/x)\ \{1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^r x^r+\ldots\}.$$

अतः वांछित x^r का गुणांक

$$= 3(-1)^{r-1} - 2\ (-1)^{r-1},$$

$$= 3(-1)^{r-1} - 2(-1)^{r-1}(-1)^2,$$

$$= (-1)^{r-1},$$

(ii) $(1+2x)^{15/2}$ का संख्यात्मक महत्तम पद ज्ञात करो जब कि $x=1/3$।

यहाँ $$T_{r+1} = \frac{15/2 - r + 1}{r} \cdot \frac{2}{3} \times T_r$$
$$= \frac{17-2r}{3r} T_r .$$

अतएव
$$T_{r+1} > T_r ,$$
जब कि $$\frac{17-2r}{3r} > 1 ,$$
अर्थात्, $$r < 17/5 = 3 + 2/5 .$$
परंतु r पूर्ण संख्या है। इस कारण r का महत्तम मान 3 और संख्यात्मक पद $4th$ है।

महत्तम पद का संख्यात्मक मान
$$= \frac{15/2 \,.\, 13/2 \,.\, 11/2}{3!} (2/3)^3 ,$$
$$= 13 \frac{13}{54} .$$

1·37. अनुप्रयोग : अब हम द्विपद-प्रमेय के कुछ अनुप्रयोगों का वर्णन करेंगे।

(i) ***श्रेणी का योगफल*** : यदि कोई श्रेणी द्विपद विस्तार के रूप में संपरिवर्तित की जा सके, तो उसका योगफल द्विपद-प्रमेय से तुरंत लिख सकते हैं।

श्रेणी के संपरिवर्तन के लिए, व्यापक पद के अंश और हर को ऐसे गुणनखंड से गुणा करते हैं कि हर $r!$ हो जाय और अंश में किसी संख्या x की r^{th} घातांक के अतिरिक्त, r गुणनखंड हो जायँ जिनका क्रमागत अंतर एक हो। यह विधि निम्नलिखित उदाहरणों से स्पष्ट हो जाएगी।

(i) श्रेणी
$$1 + 1/3x + \frac{1.4}{3.6} x^2 + \frac{1.4.7}{3.6.9} x^3 + \ . \ . \ .$$
का अनत पदों तक योगफल ज्ञात करो।

निर्दिष्ट श्रेणी

$$= 1 + 1/3x + \frac{(1/3)(4/3)}{1.2} x^2 + \frac{(1/3)(4/3)(7/3)}{1.2.3} x^3 + \cdots$$

$$= 1 + (-1/3)(-x) + \frac{(-1/3)(-1/3-1)}{2!}(-x)^2 +$$

$$+ \frac{(-1/3)(-1/3-1)(-1/3-2)}{3!}(-x)^3 + \ldots,$$

$$= (1-x)^{1/3}$$

(ii) *सिद्ध करो कि*

$$1 + \frac{2n}{3} + \frac{2n(2n+2)}{3.6} + \frac{2n(2n+2)(2n+4)}{3.6.9} + \ldots$$

$$= 2^n \left\{1 + n/3 + \frac{n(n+1)}{3.6} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3.6.9} + \ldots\right\}.$$

वाम पक्षीय श्रेणी

$$= 1 + \frac{2n}{3} + \frac{n(n+1)}{1.2}\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + \ldots,$$

$$= (1-2/3)^{-n} = 3^n.$$

दक्षिण पक्षीय श्रेणी

$$= 2^n \left\{1 + n(1/3) + \frac{n(n+1)}{1.2}(1/3)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}(1/3)^3 + \cdots \right\}$$

$$= 2^n(1-1/3)^{-n} = 3^n.$$

अतएव साध्य प्रमाणित हो जाता है।

(ii) **सन्निकटन** : सन्निकट मान निकालने में द्विपद-प्रमेय का उपयोग प्रायः किया जाता है। निर्देशन के लिए कुछ उदाहरण दिए जाते हैं।

(i) *यदि x अति लघु हो, तो सिद्ध करो कि*

$$\frac{(2-x)^{1/3}(4+3x)^{2/3}}{(1-x)^{1/3}(4-3x)^{1/3}} = 2 + \frac{11}{6}x.$$

यदि x इतना लघु है कि x^2, x^3 ,... इत्यादि की उपेक्षा की जा सके, तो वाम पक्ष व्यंजक

$$=\frac{2^{1/3}(1-x/2)^{1/3}\cdot 4^{2/3}(1+3x/4)^{2/3}}{(1-x)^{1/3}.4^{1/3}(1-3x/4)^{1/3}},$$

$$=\frac{2(1-x/6)(1+x/2)}{(1-x/3)(1-x/4)},$$

$$=2.\frac{1+x/2-x/6}{1-x/4-x/3},$$

$$=2(1+x/3)(1-7x/12)^{-1},$$

$$=2(1+x/3)(1+7x/12),$$

$$=2(1+7x/12+x/3),$$

$$=2+11x/6.$$

(ii) 624 के चतुर्थ मूल का सन्निकट मान दशमलव के चार स्थानों तक शुद्ध ज्ञात करो।

$$(624)^{1/4}=(625-1)^{1/4},$$

$$=(5^4-1)^{1/4},$$

$$=5\ (1-1/5^4)^{1/4},$$

$$=5\left\{1-1/4.\ 1/5^4+\frac{(1/4)(1/4-1)}{2!}\ (1/5^4)^2\cdots\right\},$$

$$=5-2/10^3-12/10^7-\cdots,$$

$$=5-\cdot 002-\cdot 0000012-\ldots,$$

$=4\cdot 9988$, सन्निकटतः।

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित व्यंजकों का x की आरोही घातांकों में प्रथम चार पदों तक का विस्तार करो; तथा यह ज्ञात करो कि x के किन मान के लिए यह विस्तार सत्य है :

(i) $(1+x)^{5/2}$ (ii) $(4a-8x)^{-3/2}$.

(iii) $(3x^2+4y^2)^{-2}$

2. व्यंजकों

(i) $(1+2x)^{1/2}$, (ii) $(a-bx)^{-2}$

के विस्तार का व्यापक पद ज्ञात करो।

3. गुणांक ज्ञात करो:

(i) $\dfrac{3-4x^2}{(9-2x)^3}$ के विस्तार में x^r का।

(ii) $\{\frac{1}{2}x^{1/2}-2x^{-1/2}\}^{-14}$ के विस्तार में x^7 का, जब कि $x < 1/2$।

4. निम्नलिखित व्यंजकों के विस्तार में कौन सा महत्तम पद है ?

(i) $(1+x)^{-20}$, जब कि $x=2/3$ ।

(ii) $(5+7x)^{-9/4}$, जब कि $x=5/8$ ।

(iii) $(3x^2+4y^3)^{-n}$, जब कि $x=9,\ y=2,\ n=15$ ।

5. सिद्ध करो कि

$$(1+x+x^2+\ldots)(1+3x+6x^2+\ldots\ldots).$$
$$=(1+2x+3x^2+\ldots\ldots)^2.$$

6. $(1+x+x^2+\ldots\ \infty\text{ तक})^2$ के विस्तार में x^n का गुणांक ज्ञात करो।

7. दिखाओ कि $(x+1/x)^{4n}$ का मध्य पद $(1-4x)^{-n-1/2}$ के विस्तार में x^n के गुणांक के बराबर है। [विहार, 1954]

निम्नलिखित श्रेणियों के अनंत पदों तक का योगफल ज्ञात करो:

8. $1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1.3}{4.8}+\dfrac{1.3.5}{4.8.12}+\ldots\ldots\ldots$

9. $1+\dfrac{2}{9}+\dfrac{2.5}{9.18}+\dfrac{2.5.8}{9.18.27}+\ldots\ldots\ldots$

[बंबई, 1952]

10. $1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1.4}{5.10}-\dfrac{1.4.7}{5.10.15}+\dfrac{1.4.7.10}{5.10.15.20}-\ldots\ldots\ldots$

[बंबई, 1947]

11. $1-\dfrac{3}{4}+\dfrac{3.5}{4.8}-\dfrac{3.5.7}{4.8.12}+\ldots\ldots\ldots$

[गुजरात, 1953]

12. $1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2.5}{3.6}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{2.5.8}{3.6.9}\cdot\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots\ldots$

[उत्कल, 1944]

13. $2+\frac{5}{2!\,.3}+\frac{5.7}{3!\,.3^2}+\frac{5.7.9}{4!\,.3^3}+\ldots\ldots\ldots$

[इलाहाबाद, 1946]

14. सिद्ध करो कि

$$1=\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.6}+\frac{1.3.5}{4.6.8}+\ldots\ldots\ldots$$

[आगरा, 1941]

यदि x इतना लघु हो कि x की दो अथवा दो से उच्च घातांकों के पदों की उपेक्षा की जा सके, तो निम्नलिखित व्यंजकों का सन्निकट मान ज्ञात करो :

15. $\frac{(9+7x)^{1/2}-(16+3x)^{1/4}}{4+5x}$.

16. $\frac{(1+x)^{1/2}+(1-2x)^{1/4}}{(1+3x)^{1/6}+(1+5x)^{1/10}}$.

17. $\frac{(8+3x)^{2/3}}{(2+3x)\sqrt{(4-5x)}}$.

निम्नलिखित व्यंजकों का सन्निकट मान दशमलव के चार स्थानों का ज्ञात करो :

18. $\sqrt{98}$.

19. $(35)^{1/5}$.

20 $(630)^{-1/4}$

विविध प्रश्नावली

1. यदि $(x+a)^n$ के विस्तार में विषम पदों का योग P और सम पदों का योग Q हो, तो दिखाओ कि

(i) $P^2-Q^2=(x^2-a^2)^n$,

(ii) $4PQ=(x+a)^{2n}-(x-a)^{2n}$

2. निम्नवर्ती का x के घातांकों में विस्तार करो :

(i) $(1+3x+2x^2)^3$, (ii) $(x+1/x+2)^4$

(iii) $(ax^3+bx^2+cx+d)^4$

3. निम्नलिखित व्यंजकों का x की आरोही घातांकों में x^3 तक विस्तार करो :

(i) $(1-x-x^2)^{-1/2}$. (ii) $(1+x+x^2)^{-1}$.

(iii) $(1+2x+2x^2)^{1/2}$. (iv) $1/\sqrt{(ax^2+bx+c)}$.

4. व्यंजक $(1+3x)^{1/2}$ $(1-2x)^{-1/3}$ का x की आरोही घातांकों में प्रथम तीन पदों तक विस्तार करो। [मद्रास, 1948]

5. यदि $(1+x)^n$ के विस्तार में तीन क्रमागत गुणांक 36, 84, 126 हों, तो n का मान ज्ञात करो।

6. यदि $(1+x)^n$ के विस्तार में p^{th}, $(p+1)^{th}$ और $(p+2)^{th}$ पदों के गुणांक समान्तर श्रेणी में हों, तो सिद्ध करो कि

$$n^2-n(4p+1)+4p^2-2=0.$$

7. यदि किसी द्विपद-विस्तार में चार क्रमागत गुणांक a,b,c,d हों, तो सिद्ध करो :

(i) $(bc+ad)(b-c)=2(ac^2-b^2d)$.

(ii) $a/(a+b)+c/(c+d)=2b/(b+c)$.

8. यदि n धनपूर्ण संख्या हो, तो दिखाओ कि $(3+\sqrt{7})^n$ का पूर्ण सांख्यिक भाग एक विषम संख्या है। [बंम्बई, 1948]

9. सिद्ध करो कि $1/(1+x+x^2)$ के विस्तार में x^n के गुणांक n के $3m$, $3m-1$, अथवा $3m+1$ के रूपानुसार 1, 0, अथवा -1 होंगे।

[पटना, 1953]

10. दिखाओ कि $(1+2x)/(1-x+x^2)$ के विस्तार में x^m के गुणांक $(-1)^{m/3}$, $3(-1)^{(m-1)/3}$, अथवा $2(-1)^{(m-2)/3}$ हैं, जब कि m क्रमशः $3n$, $3n+1$, अथवा $3n+2$ के रूप का है और n एक धन पूर्ण सख्या है।

[दिल्ली, 1949]

11. दिखाओ कि $(1-x)^{-(r+1)}$ के विस्तार में x^n का गुणांक $(1-x)^{-(n+1)}$ के विस्तार में x^r के गुणांक के बराबर है, जब कि r और n धन पूर्ण सख्या हैं।

12. सिद्ध करो कि n के एक से अधिक धन पूर्ण सांख्यिक मान के लिए

$$5^{3n} - 124n - 1$$

124 से भाज्य है।

13. सिद्ध करो कि n के धनपूर्ण सांख्यिक मान के लिए

$$3^{4n+3} - 80n - 27$$

80 से भाज्य है।

यदि $(1+x)^n$ के विस्तार के गुणांकों को $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ से निरूपित किया जाये, तो सिद्ध करो:

14. $\frac{3}{1} C_0 - \frac{4}{2} C_1 + \frac{5}{3} C_2 - \ldots + (-1)^n \frac{n+3}{n+1} C_n = \frac{2}{n+1}$.

15. $aC_0 + (a+b) C_1 + (a+2b) C_2 + \ldots + (a+nb) C_n$

$$= (2a+nb) \cdot 2^{n-1}$$

16. $aC_0^2 + (a+b) C_1^2 + (a+2b) C_2^2 + \ldots + (a+nb) C_n^2$

$$= (2a+nb) \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

17. $C_0 C_r + C_1 C_{r+1} + C_2 C_{r+2} + \ldots + C_{n-r} C_n$

$$= \frac{(2n)!}{(n-r)!\,(n+r)!}.$$

18. दिखाओ कि

$$C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \ldots + nC_n x^{n-1} = n (1+x)^{n-1}.$$

अतएव

$$C_1^2 + 2^2 C_2^2 + 3^2 C_3^2 + \ldots + n^2 C_n^2$$

का मान ज्ञात करो।

19. यदि $(1+x)^n$ और $(1+x)^m$ के विस्तार के गुणांकों को क्रमशः $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ तथा $b, b_1, b_2, \ldots, b_m$ से निरूपित किया जाये, तो सिद्ध करो कि

$$b_r C_0 + b_{r-1} C_1 + b_{r-2} C_2 + \ldots + b_0 C_r = \frac{(m+n)!}{r!\,(m+n-r)!}$$

20. यदि c इतना लघु हो कि l^3 की तुलना में c^3 की उपेक्षा की जा सके, तो दिखाओ कि

$$\sqrt{\frac{l}{l+c}}+\sqrt{\frac{l}{l-c}}=2+\frac{3c^2}{4l^2} \text{ सन्निकटतः ।}$$

21. यदि x इतना लघु हो कि x^3 और x की अन्य उच्चतर घातांकों की उपेक्षा की जा सके, तो दिखाओ कि $1+x$ का n वाँ मूल सन्निकटतः

$$\frac{2n+(n+1)\,x}{2n+(n-1)\,x}$$

है ।

निम्नलिखित श्रेणी का योगफल ज्ञात करो :

22. $1+\frac{4}{6}+\frac{4.5}{6.9}+\frac{4.5.6}{6.9.12}+\ldots\ldots\ldots$

[आंन्घ्र, 1954]

23. $1+\frac{5}{8}+\frac{5.8}{8.12}+\frac{5.8.11}{8.12.16}+\ldots\ldots\ldots$

[अनामलाई, 1949]

24. $\frac{1}{2.4.6}+\frac{1.3}{2.4.6.8}+\frac{1.3.5}{2.4.6.8.10}+\ldots\ldots\ldots$

[बम्बई, 1947]

25. दिखाओ कि

$$\frac{5}{3.6}+\frac{5.7}{3.6.9}+\frac{5.7.9}{3.6.9.12}+\ldots=\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2)\,.$$

[अनामलाई, 1950]

26. द्विपद-विस्तार के रूप में संपरिवर्तित कर दिखाओ कि

$$\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\frac{1.3.5.7}{3.6.9.12}+\ldots\ldots=0.4 \text{ सन्निकटतः ।}$$

27. गुणनफल $(1-x)^{-1}\,(1-x)^{-1/2}$ के अनुप्रयोग से

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\ldots+\frac{1.3.5\cdot\ldots(2n-3)}{2.4.6\cdot\ldots(2n-2)}$$

का मान ज्ञात करो।

[अनामलाई, 1954]

28. यदि $x > -1/2$, तो दिखाओ कि

$$\frac{x}{\sqrt{(1+x)}}=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\ldots\ldots$$

[कर्नाटक, 1954]

29. दिखाओ कि

$$1+\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{2.4}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.4.6}+\ldots\ldots\ldots$$

$$=1+\frac{n}{3}+\frac{n(n+1)}{3.6}+\frac{n(n+1)(n+2)}{3.6.9}+\ldots\ldots$$

[उत्कल, 1952]

30. सिद्ध करो कि

$$7^n\left\{1+\frac{n}{7}+\frac{n(n-1)}{7.14}+\frac{n(n-1)(n-2)}{7.14.21}+\ldots\ldots\right\}$$

$$=4^n\left\{1+\frac{1}{2}n+\frac{n(n+1)}{2.4}+\frac{n(n+1)(n+2)}{2.4.6}+\ldots\ldots\right\}.$$

अध्याय २

घातीय और लघुगणकीय श्रेणी

2·1. इस अध्याय में हम द्विपद-प्रमेय के अनुप्रयोग से e^x और लघु$_e(1+x)$ का x की आरोही श्रेणी में विस्तार ज्ञात करेंगे। e^x को घातीय फलन और उसके x की आरोही श्रेणी में विस्तार को घातीय श्रेणी कहते हैं। इसी भाँति लघु$_e(1+x)$ को लघुगणकीय फलन और इसके x की आरोही श्रेणी में विस्तार को लघुगणकीय श्रेणी कहते हैं।

2·2. संख्या e : श्रेणी

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots\ldots \qquad (1)$$

का योगफल एक परिमित संख्या होती है क्योंकि श्रेणी

$$=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots$$

अर्थात्, $\quad <1+1/(1-\frac{1}{2})=3.$

योगफल (1) को साधारणतया e से सूचित करते हैं और इसका बीजगणित में एक विशेष महत्व है।

पुनः

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots > 1+\frac{1}{1!}=2\,.$$

अत; e का मान 2 और 3 के मध्य है।

2·21. e की अपरिमेयता : *यह सिद्ध करना कि e अपरिमेय संख्या है*

यदि सम्भव हो, तो कल्पना करो कि e एक परिमेय संख्या है तथा धन पूर्ण संख्याओं p और q के अनुपात p/q के रूप में अभिव्यक्त की जा सकती है; तो

$$\frac{p}{q}=\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)+\frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+2)!}+\cdots(1)$$

दोनों पक्षों का $q!$ से गुणा करने पर प्राप्त होता है

$$p(q-1)!= \text{(एक पूर्ण संख्या)} + \frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1)\ (q+2)}+\cdots\cdots\cdots\ (2)$$

परंतु

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}+\cdots\cdots$$

उचित भिन्न है क्योंकि यह गुणोत्तर श्रेणी

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)\ (q+1)}+\frac{1}{(q+1)\ (q+1)\ \ (q+1)}+\cdots\cdots$$

अथवा, $\frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+\cdots\cdots\cdots$

के योगफल $1/q$ से कम हैं।

अतः, समीकरण (2) के अनुसार

एक पूर्ण संख्या = एक अन्य पूर्ण संख्या + एक उचित भिन्न,

जो कि असम्भव है। अतः e को दो पूर्ण संख्याओं p और q के अनुपात p/q में अभिव्यक्त नहीं कर सकते ओर अतएव यह एक अपरिमेय संख्या है।

2·22. e का सन्निकट मान : e का यथार्थ मान ज्ञात करना सम्भव नहीं है क्योंकि यह एक अपरिमेय संख्या है। परंतु इसका सन्निकट मान §2.2 (1) के अनुप्रयोग से किसी भी वांछित परिशुद्धता-मात्रा तक ज्ञात कर सकते हैं। यह मान दशमलव के नौ स्थानों तक शुद्ध 2.718281828 है।

2.3. घातीय-प्रमेय : श्रेणी

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots\cdots\cdots$$

का योगफल n के समस्त मान, धन अथवा ऋण, पूर्ण सांख्यिक अथवा भिन्नात्मक, के लिए e^x होता है।

यदि $n>1$, तो द्विपद-प्रमेय से

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+nx.\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots\ldots$$

$$=1+x+\frac{x(x-1/n)}{2!}+\frac{x(x-1/n)(x-2/n)}{3!}+\ldots \quad (1)$$

संबंध (1) में $x=1$ प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\frac{1-1/n}{2!}+\frac{(1-1/n)(1-2/n)}{3!}+\ldots\ldots \quad (2)$$

परंतु

$$\{(1+1/n)^n\}^x=(1+1/n)^{nx};$$

अत:

$$\left\{1+1+\frac{1-1/n}{2!}+\frac{(1-1/n)(1-2/n)}{3!}+\ldots\ldots\right\}^x$$

$$=1+x+\frac{x(x-1/n)}{2!}+\frac{x(x-1/n)(x-2/n)}{3!}+\ldots\ldots$$

यह परिणाम सत्य है, चाहे n कितना भी बृहत् क्यों न हो। यदि n अनियत-रूपेण बृहत् संख्या हो, तो $1/n$ शून्य हो जाता है और हमको प्राप्त होता है

$$\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots$$

अथवा $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ldots$$

इसको घातीय-प्रमेय कहते हैं।

2·31. महत्त्वपूर्ण व्युत्पत्ति : घातीय-प्रमेय से निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण परिणाम निगमन किये जा सकते हैं:—

(i) घातीय-प्रमेय में x के स्थान पर x लघु $_e a$ प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$a^x=1+x\text{लघु}a+\frac{(x\text{लघु}a)^2}{2!}+\frac{(x\text{लघु}a)}{3!}+\ldots+\frac{(x\text{लघु}a)^n}{n!}+\ldots\ldots$$

इसको व्यापक घातीय-प्रमेय कहते हैं।

(ii) घातीय-प्रमेय

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

में x के स्थान पर $-x$ प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots \quad (2)$$

(1) और (2) के योगफल को 2 से भाग करने पर प्राप्त होता है

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \quad (3)$$

(2) में से (1) को घटाकर 2 से भाग करने पर प्राप्त होता है

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

(3) और (4) की दक्षिण पक्षीय श्रेणी को अतिपरवलयिक कोज्या और अतिपरवलयिक ज्या श्रेणी कहते हैं और इनको क्रमशः कोज्याति x और ज्याति x से निरूपित करते हैं।

2·4. श्रेणी का योगफल : घातीय-प्रमेय के अनुप्रयोग से कुछ श्रेणियों का योगफल ज्ञात कर सकते हैं। यदि कोई श्रेणी § 2·31 की (1), (2), (3) अथवा (4) की श्रेणियों के रूप में संपरिवर्तित की जा सके, तो स्पष्टतया उसका योगफल सर्वदा निकाल सकेंगे।

2 5. उदाहरण : *सिद्ध करो कि*

$$1 + \frac{1+3}{2!} + \frac{1+3+3^2}{3!} + \frac{1+3+3^2+3^3}{4!} + \cdots\cdots\cdots = \frac{1}{3}e(e^2-1).$$

[मद्रास, 1953]

यदि n^{th} पद को T_n से सूचित किया जाय, तो

$$T_n = \frac{1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}}{n!},$$

$$=\frac{3^n-1}{2n!},$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{3^n}{n!}-\frac{1}{n!}\right).$$

अत: निर्दिष्ट श्रेणी

$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{3}{1!}-\frac{1}{1!}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{3^2}{2!}-\frac{1}{2!}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{3^3}{3!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots,$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\cdots\right)-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right),$$

$$=\tfrac{1}{2}(e^3-1)-\tfrac{1}{2}(e-1),$$

$$=\tfrac{1}{2}e(e^2-1).$$

प्रश्नावली

1. e^{-ix} के विस्तार के प्रथम पाँच एवं $(r+1)$th पद ज्ञात करो।

2. $\sqrt{e}$ और $1/e$ का सन्निकट मान दशमलव के चार स्थानों तक शुद्ध ज्ञात करो।

x की आरोही श्रणी में विस्तार करो:

3. $\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$ 4. $(e^{5x}+e^{x})/e^{3x}$

5. व्यंजक $(a+bx+cx)/e^x$ के विस्तार में x^r का गुणांक ज्ञात करो।

दिखाओ:

6. $\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\dots\right)=1.$

7. $\left(1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\dots\right)\left(1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\dots\right)=\frac{(e-1)^2}{e}.$

सिद्ध करो:

8. $\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{6!}+\dots\right)^2=\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\dots\right)^2$

[मद्रास, 1949]

9. $$\frac{e^2+1}{e^2-1} = \frac{1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots\cdots}{1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\cdots\cdots}.$$

10. $$\frac{e-1}{e+1} = \frac{\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots\cdots\cdots}{1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\cdots\cdots}.$$

[कलकत्ता, 1934]

11. श्रेणी

$1+\frac{\log_e 2}{2!}+\frac{(\log_e 2)^2}{3!}+\cdots\cdots\cdots$ का योगफल ज्ञात करो।

[बम्बई, 1947]

12. सिद्ध करो :

(i) $\frac{2}{1!}+\frac{4}{3!}+\frac{6}{5!}+\frac{8}{7!}+\cdots\cdots\cdots = e.$

(ii) $\frac{2}{3!}+\frac{4}{5!}+\frac{6}{7!}+\frac{8}{9!}+\cdots\cdots\cdots = e^{-1}.$

[दिल्ली, 1959]

निम्नलिखित श्रेणी का योगफल ज्ञात करो :

13. $1+\frac{3}{1!}+\frac{5}{2!}+\frac{7}{3!}+\frac{9}{4!}+\cdots\cdots\cdots$

14. $1+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\frac{4^2}{4!}+\cdots\cdots\cdots$

[रुड़की, 1947]

15. $1+\frac{1+2}{2!}+\frac{1+2+3}{3!}+\frac{1+2+3+4}{4!}+\cdots\cdots\cdots$

[पूना, 1950]

16. $1+\frac{1+3}{2!}+\frac{1+3+5}{3!}+\frac{1+3+5+7}{4!}+\cdots\cdots\cdots$

17. $1+\frac{1+2}{2!}+\frac{1+2+2^2}{3!}+\frac{1+2+2^2+2^3}{4!}+\dots\dots\dots$

[रंगून, 1950]

18. $\frac{1^2}{2!}+\frac{2^2}{3!}+\frac{3^2}{4!}+\dots\dots\dots$

[दिल्ली, 1958]

19. $\frac{2.3}{3!}+\frac{3.5}{4!}+\frac{4.7}{5!}+\frac{5.9}{6!}+\dots\dots\dots$

[मैसूर, 1952]

20. $1+\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{4^3}{4!}+\dots\dots\dots$

[आगरा, 1955]

2·6 लघुगणक : यदि $e^x=a$, तो x को e के आधार पर a का लघु-गणक कहते हैं और हम लिखते हैं

$$x=\text{लघु}_e a.$$

अतएव

$$e^{\text{लघु}\, a}=a, \text{ और लघु } e^x=x.$$

क्योंकि $e>1$ e^x एक से अधिक होगा जब कि x धन है और एक से कम जब x ऋण है। हमको यह भी ज्ञात है कि $e^0=1$। अतएव, (1) से स्पष्ट है कि लघु a धन है जब कि $a>1$, ऋण जब $a<1$ और शून्य जब $a=1$।

e के आधार के लघुगणक को प्राकृतिक लघुगणक, अथवा लघुगणक के आविष्कारक नेपियर के नाम पर नेपिरीय लघुगणक कहते हैं। सैद्धांतिक कार्य में हम अधिकतर प्राकृतिक लघुगणक का प्रयोग करते हैं और यदि संभ्रान्ति का डर न हो, तो प्रायः अनुबंध e को छोड़ देते हैं।

10 के आधार के लघुगणक को साधारण लघुगणक कहते हैं। संख्यात्मक कार्य में सुविधा के कारण साधारण लघुगणक का सदा प्रयोग किया जाता है और, यदि वर्णित न हो, तो उसका आधार 10 समझा जाता है। इस प्रकार लघु 2 का अर्थ लघु$_{10}$ 2 और लघु a का लघु$_{10}a$ है। यदि संभ्रान्ति की सम्भावना हो, तो आधार को वर्णित करना चाहिए।

नेपिरीय लघुगणक से साधारण लघुगणक को प्राप्त करने के लिए नेपिरीय लघुगणक को 1/लघु$_e$ 10 से गुणा करते हैं।

क्योंकि, यदि n के साधारण लघुगणक को x से सूचित किया जाय, तो $n=10^x$; अतएव

$$\text{लघु}_e\, n = \text{लघु}_e\, 10^x = x \text{ लघु}_e\, 10,$$

अथवा $$x = \text{लघु}_e\, n / \text{लघु}_e\, 10,$$

अर्थात्, $$\text{लघु}_{10}\, n = \text{लघु}_e\, n / \text{लघु}_e\, 10.$$

1/लघु$_e$10 को साधारण लघुगणक का मापांक कहते हैं। इसका सन्निकट मान ·43429448 है और इसको साधारणतया μ से सूचित करते हैं।

2·7. लघुगणकीय श्रेणी : यदि x का संख्यात्मक मान एक से कम हो, तो

$$\text{लघु}_e(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots.$$

अनुच्छेद 2·31. के व्यापक घातीय-प्रमेय में x के स्थान पर y और a के स्थान पर $1+x$ लिखने पर प्राप्त होता है

$$(1+x)^y = 1 + y\,\text{लघु}_e\,(1+x) + \frac{y^2}{2!}\left\{\text{लघु}_e\,(1+x)\right\}^2 + \frac{y^3}{3!}\left\{\text{लघु}_e\,(1+x)\right\}^3 + \ldots\ldots \quad (1)$$

परंतु, द्विपद-प्रमेय से

$$(1+x)^y = 1 + yx + \frac{y(y-1)}{2!}x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{3!}x^3 + \ldots \quad (2)$$

क्योंकि (1) और (2) एक ही व्यंजक के दो भिन्न विस्तार हैं, इनमें y के गुणांक बराबर होने चाहिए।

अतः

$$\text{लघु}_e\,(1+x) = x + \frac{(-1)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-2)}{3!}x^3 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{4!}x^4 + \ldots,$$

$$= x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots\ldots\ldots$$

इसको लघुगणकीय श्रेणी कहते हैं।

2·8. लघुगणक की गणना : लघुगणकीय श्रेणी

$$\text{लघु}_e (1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots \quad (1)$$

का लघुगणक गणना में उपयोग केवल उस समय हो सकता है जब कि x का संख्यात्मक मान एक से कम हो; और तब भी यह सुविधाजनक नहीं है जब तक कि x अति लघु है, क्योंकि इसमें पद धीरे-धीरे घटते हैं और वांछित विशुद्धता के लिए अधिक संख्या में पदों को लेने की आवश्यकता होती है। इस कारण अब हम ऐसी श्रेणी प्राप्त करेंगे जो लघुगणक गणना में अधिक सुविधाजनक हो।

श्रेणी (1) में x के स्थान पर $-x$ रखने पर प्राप्त होता है

$$\text{लघु}_e (1-x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

अतः

$$\text{लघु}\ \frac{1+x}{1-x} = \text{लघु}\ (1+x) - \text{लघु}\ (1-x),$$

$$= 2\left(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \ldots\ldots\ldots\right). \quad (3)$$

संबंध (3) में $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{m}{n}$, अर्थात् $x = \dfrac{m-n}{m+n}$ रखने पर प्राप्त होता है

$$\text{लघु}\ \frac{m}{n} = 2\left\{\frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + \ldots\right\} \quad (4)$$

यह श्रेणी लघुगणकीय श्रेणी की अपेक्षा शीघ्रतर अभिसारी है और इस कारण किसी संख्या के लघुगणक के सन्निकट मान की गणना में अधिक सुविधाजनक है।

2·9. उदाहरण : (i) *लघु$_e$ 2 का सन्निकट मान दशमलव के नौ स्थानों तक ज्ञात करो।*

अनुच्छेद 2.8 के समीकरण (4) में $m = 2$ और $n = 1$ लेने पर प्राप्त होता है

$$\text{लघु}_e 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \ldots\ldots\ldots\right).$$

अब, क्योंकि $\dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{3} \div 9$; $\dfrac{1}{3^5} = \dfrac{1}{3^3} \div 9$; इत्यादि।

अतएव

$$\frac{1}{3} = \cdot 333,\ 333,\ 333;$$

$$\frac{1}{3^3} = \cdot 037,\ 037,\ 037 \quad \text{और} \quad \frac{1}{3.3^3} = \cdot 012,\ 345,\ 679;$$

$$\frac{1}{3^5} = \cdot 004,\ 115,\ 226 \quad \text{और} \quad \frac{1}{5.3^5} = \cdot 000,\ 823,\ 045;$$

$$\frac{1}{3^7} = \cdot 000,\ 457,\ 247 \quad \text{और} \quad \frac{1}{7.3^7} = \cdot 000,\ 065,\ 321;$$

$$\frac{1}{3^9} = \cdot 000,\ 050,\ 805 \quad \text{और} \quad \frac{1}{9.3^9} = \cdot 000,\ 005,\ 645;$$

$$\frac{1}{3^{11}} = \cdot 000,\ 005,\ 645 \quad \text{और} \quad \frac{1}{11.3^{11}} = \cdot 000,\ 000,\ 513;$$

$$\frac{1}{3^{13}} = \cdot 000,\ 000,\ 627 \quad \text{और} \quad \frac{1}{13.3^{13}} = \cdot 000,\ 000,\ 048;$$

$$\frac{1}{3^{15}} = \cdot 000,\ 000,\ 070 \quad \text{और} \quad \frac{1}{15.3^{15}} = \cdot 000,\ 000,\ 005;$$

$$\frac{1}{3^{17}} = \cdot 000,\ 000,\ 008 \quad \text{और} \quad \frac{1}{17.3^{17}} = \cdot 000,\ 000,\ 000;$$

अतः लघु $_e 2 = 2\ (\cdot 346,\ 573,\ 589)$,

$= \cdot 693,\ 147,\ 178.$

(ii) *यदि लघु $_e 2 = \cdot 6931$, तो लघु $_{10} 2$ का सन्निकट मान दशमलव के चार स्थानों तक ज्ञात करो।*

$$\text{लघु}_{10} 2 = \frac{\text{लघु}_e 2}{\text{लघु}_e 10} = \cdot 69314 \times \cdot 43429,$$

$= \cdot 3010$ सन्निकटतः।

प्रश्नावली

निम्नलिखित व्यंजकों का विस्तार करो एवं व्यापक पद ज्ञात करो:

1. लघु $\dfrac{a+x}{a-x}$.

2. लघु $(1+3x+2x^2)$.

3. लघु $\{1/(1-x-x^2+x^3)\}$. [मद्रास, 1948]

4. दिखाओ कि लघु$_e$ $(1+x+x^2)$ के x की आरोही घातांकों के विस्तार में x^n का गुणांक n के 3 के गुणज होने व न होने के अनुसार $-2/n$ अथवा $1/n$ है।

[बम्बई, 1948]

5. $2\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7^5}+\ldots\ldots\right)$ का मान ज्ञात करो।

[अनामलाई, 1949]

6. दिखाओ कि

$$\text{लघु}\,(4/e)=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\ldots\ldots\ldots$$

[आन्ध्र, 1950]

7. सिद्ध करो कि

$$\text{लघु}_e\sqrt{12}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\frac{1}{4^2}+\ldots\ldots\ldots$$

8. दिखाओ कि

$$1+\frac{1}{3.2^2}+\frac{1}{5.2^4}+\frac{1}{7.2^6}+\ldots\ldots\ldots=\text{लघु}_e\,3\,।$$

[पटना, 1949]

9. सिद्ध करो कि

$$\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^6}{5.6}+\ldots\ldots=\tfrac{1}{2}\,\text{लघु}\,(1+x)^{1+x}(1-x)^{1-x}.$$

10. दिखाओ कि

$$\text{लघु}_e\,10=3\,\text{लघु}_e 2+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{4}\right)^3-\ldots\ldots\ldots$$

[मद्रास, 1949]

11. यदि $n>1$, तो सिद्ध करो

$$2\,\text{लघु}_e n-\text{लघु}_e(n+1)-\text{लघु}_e(n-1)$$
$$=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^4}+\frac{1}{3n^6}+\ldots\ldots\ldots$$

[आगरा, 1948]

12. सिद्ध करो कि

$$\text{लघु}_e 11 = 2\ \text{लघु}_e 7 - \text{लघु}_e 3 - \left\{ \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{7}\right)^4 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{7}\right)^6 + \cdots \right\}.$$

13. सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^3} + \cdots\cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots\cdots\cdots.$$

[आगरा, 1953]

14. दिखाओ कि

$$\frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-1}{2(x+1)^2} + \frac{x^3-1}{3(x+1)^3} + \cdots\cdots\cdots = \text{लघु}\ x.$$

[मद्रास, 1954]

15. सिद्ध करो कि

$$\text{लघु}_e \frac{x+1}{x} = 2\left[\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{5(2x+1)^3} + \cdots\right].$$

[उत्कल, 1946]

16. यदि $\text{लघु}_{10} 2 = 0{\cdot}30103$ और $\text{लघु}_{10} e = 0{\cdot}43429$, तो 7, 11 और 13 का साधारण लघुगणक ज्ञात करो।

2.10. विविध उदाहरण : (i) यदि

$$y = x - \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{3} x^3 - \tfrac{1}{4} x^4 + \cdots,$$

तो दिखाओ कि

$$x = y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots.$$

[दिल्ली, 1959]

यदि $\quad y = x - \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{3} x^3 - \tfrac{1}{4} x^4 + \cdots\cdots\cdots,$

तो $\quad y = \text{लघु}\ (1+x),$

अथवा $1+x=e^y,$

$$=1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \quad x=y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots$$

(ii) यदि समीकरण $x^2-px+q=o$ के मूल α और β हों, तो दिखाओ कि

$$-\text{लघु}_e\,(1-px+qx^2)=(\alpha+\beta)\,x+\tfrac{1}{2}\,(\alpha^2+\beta^2)\,x^2$$

$$+\ldots+\frac{1}{n}\,(\alpha^n+\beta^n)\,x^n+\ldots\ldots\ldots$$

[आगरा, 1961].

क्योंकि समीकरण के मूल α और β हैं, अतएव

$$\alpha+\beta=p\,;\quad \alpha\beta=q\,.$$

$$\therefore -\text{लघु}\,(1-px+qx^2)=-\text{लघु}\,\{1-(\alpha+\beta)\,x+\alpha\beta\,x^2\},$$

$$=-\text{लघु}\,(1-\alpha x)\,(1-\beta x),$$

$$=-\text{लघु}\,(1-\alpha x)-\text{लघु}\,(1-\beta x),$$

$$=\alpha x+\tfrac{1}{2}\alpha^2x^2+\tfrac{1}{3}\alpha^3x^3+\ldots+\frac{1}{n}\alpha^nx^n+\ldots$$

$$\ldots+\beta x+\tfrac{1}{2}\beta^2x^2+\tfrac{1}{3}\beta^3x^3+\ldots+\frac{1}{n}\beta^nx^n+\ldots,$$

$$=(\alpha+\beta)x+\tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)x^3+\tfrac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3)x^3$$

$$+\ldots+\frac{1}{n}(\alpha^n+\beta^n)\,x^n+\ldots\ldots\ldots$$

(iii) श्रेणी

$\frac{9}{1!}+\frac{19}{2!}+\frac{35}{3!}+\frac{57}{4!}+\frac{85}{5!}+\ldots$ का अनंत पदों तक योगफल ज्ञात करो।

कल्पना करो कि श्रेणी

$$9+19+35+57+85+\ldots\ldots\ldots$$

का n^{th} पद t_n और योगफल S है; तो

$$S = 9 + 19 + 35 + 57 + 85 + \ldots + t_n \ ;$$
$$S = \quad 9 + 19 + 35 + 57 + \ldots + t_{n-1} + t_n \ .$$

घटाने पर प्राप्त होता है

$$0 = 9 + [10 + 16 + 22 + 28 + \ldots (n-1) \text{ पदों तक}] - t_n \ ,$$
$$= 9 + \frac{n-1}{2}\left\{20 + (n-2)\,6\right\} - t_n \ ,$$
$$= (3n^2 + n + 5) - t_n \ .$$

$$\therefore \qquad t_n = 3n^2 + n + 5 \ .$$

अतएव निर्दिष्ट श्रेणी का n^{th} पद

$$= \frac{3n^2 + n + 5}{n!} \ ,$$
$$= \frac{3n\,(n-1) + 4n + 5}{n!} \ ,$$
$$= \frac{3}{(n-2)!} + \frac{4}{(n-1)!} + \frac{5}{n!} \ .$$

अतः वांछित योगफल

$$= 3 \sum_1^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 4 \sum_1^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 5 \sum_1^{\infty} \frac{1}{n!} \ ,$$
$$= 3\,e + 4\,e + 5(e-1) \ ,$$
$$= 12\,e - 5 \ , \quad .$$

विविध प्रश्नावली

1. सिद्ध करो कि

लघु $\left\{(1+2\,e^x)/3\right\} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{81}x^3$, जब कि x की उच्चतर घातों की उपेक्षा की गई हो।

[आन्ध्र, 1950]

2. लघु $\{(1+x+x^2)/(1-x+x^2)\}$ को x की आरोही घातांकों में विस्तार करो। [बम्बई, 1954]

3. यदि लघु $(1-x+x^2)$ का x की आरोही घातांकों में

$$a_1x+a_2x^2+a_3x^3+ \ldots\ldots\ldots .$$

के रूप में विस्तार किया जाये, तो दिखाओ कि

$$a_3+a_6+a_9+\ldots\ldots\ldots=\frac{2}{3} \text{ लघु }_e 2.$$

[राजस्थान, 1950]

4. यदि लघु $(1+x+x^2+x^3)$ का x की आरोही घातांकों में विस्तार किया जाये, तो दिखाओ कि x^n का गुणांक $1/n$ है जब कि n विषम अथवा $4m+2$ के रूप का है और $-3/n$ है जब कि n, $4m$ के रूप का है।

[राजस्थान, 1959]

5. यदि $y=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\ldots$, तो दिखाओ कि

$$x=y-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}-\frac{y^4}{4!}+\ldots\ldots\ldots .$$

6. यदि $y=x/(x+1)$ और $o<x<1$, तो

$$x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\ldots\ldots\ldots .$$

को y के घातांकों की श्रेणी में अभिव्यक्त करो।

7. यदि $x^2y=2x-y$ और $o<x<1$, तो सिद्ध करो कि

$$y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\ldots=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\ldots\ldots\right).$$

8. यदि $y=2x^2-1$, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3x^6}+\ldots=\frac{2}{y}+\frac{2}{3y^3}+\frac{2}{5y^5}+\ldots\ldots\ldots .$$

9. यदि x का संख्यात्मक मान एक से कम है, तो दिखाओ कि

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\frac{4}{5}x^5+\ldots\ldots\ldots .$$

$$=\frac{x}{1-x}+\text{ लघु }(1-x).$$

[आगरा, 1951]

दिखाओ :

10. $लघु_e\ 3 = 1 + \frac{1}{3.2^2} + \frac{1}{5.2^4} + \frac{1}{7.2^6} + \cdots\cdots\cdots$

[पटना, 1949]

11. $लघु\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$= 1 - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2.3(n+1)^2} - \frac{1}{3.4(n+1)^3} - \cdots\cdots$$

[मद्रास, 1953]

12. $n + \frac{1}{n} = 2\left\{1 + \frac{(लघु_e n)^2}{2!} + \frac{(लघु_e n)^4}{4!} + \cdots\right\}$

[पटना, 1950]

13. यदि $x \neq 1$, तो दिखाओ

$$\frac{1}{2}\ लघु\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^5 + \cdots$$

[मैसूर, 1949]

14. यदि p और q धन हों, तो दिखाओ कि

$$लघु_e \frac{p}{q} = 2\left\{\left(\frac{p-q}{p+q}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^5 + \cdots\right\}.$$

[रंगून, 1950]

15. $\frac{1001}{999}$ का नेपिरीय लघुगणक दशमलव के सात स्थानों तक शुद्ध निकालो ।

[इलाहाबाद, 1950]

निम्नलिखित अनंत श्रेणी का योगफल ज्ञात करो :

16. $लघु_3 e - लघु_9 e + लघु_{27} e - लघु_{81} e + \cdots\cdots\cdots$

[मद्रास, 1953]

17. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{15}x^4 + \cdots + \frac{x^{2n}}{4^{n-1}} + \cdots,\quad |x| \leqslant 1.$

[आन्ध्र, 1952]

18. $1 + \frac{2^3}{1!}x + \frac{3^3}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(n+1)^3 x^n}{n!} + \cdots\cdots\cdots$

[बम्बई, 1948]

19. $1+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\frac{4^4}{4!}+\ldots\ldots\ldots$

[कर्नाटक, 1962]

20. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n!}$

[मद्रास, 1953]

21. सिद्ध करो कि

$$\frac{1^2.\,2^2}{1!}+\frac{2^2.\,3^2}{2!}+\frac{3^2.\,4^2}{3!}+\ldots\ldots\ldots\infty = 27e .$$

[राजस्थान, 1962]

22. दिखाओ कि

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\ldots\ldots\ldots = \text{लघु}_e 2 - \frac{1}{2} .$$

[आगरा, 1962]

23. घातीय एवं द्विपद-प्रमेय के अनुप्रयोग से दिखाओ कि

$$n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot (n-2)^n - \ldots\ldots\ldots = n!$$

[पूना, 1952]

24. यदि α और β समीकरण $x^2-px+q=o$ के मूल हों, तो दिखाओ कि लघु $(1+px+qx^2)$

$$=(\alpha+\beta)x - \tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)x^2 + \tfrac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3)x^3 - \ldots$$

[इलाहाबाद, 1950]

25. यदि $ax^2+bx+c=o$ के मूल α, β हों, तो दिखाओ कि

लघु (ax^2+bx+c)

$$= \text{लघु}_e a + 2\ \text{लघु}_e x - \frac{\alpha+\beta}{x} - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2x^2} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{\alpha^n+\beta^n}{nx^n} - \ldots .$$

अध्याय 3

आंशिक भिन्न

3·1. प्रारम्भिक बीजगणित में दो या दो से अधिक भिन्न के योग को एकल भिन्न में अभिव्यक्त करने की विधियों का ज्ञान कराया गया है। अब इस अध्याय में हम एक भिन्न को उसकी रचक अथवा आंशिक भिन्नों में अभिव्यक्त करने की प्रतिलोम प्रक्रम पर विचार करेंगे परंतु हम व्यापक सिद्धांतों की समीक्षा न कर केवल आंशिक भिन्नों को ज्ञात करने की विभिन्न विधियों तक ही सीमित रहेंगे। यह प्रक्रम अनिर्धारित गुणांक विधि पर आधारित है और बीजगणित के अध्ययन में अत्यन्त उपयोगी है।

3·2. परिमेय बीजीय भिन्न : यदि a और b अचर एवं m और n धनात्मक पूर्ण संख्याएं हों, तो

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_px^p}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_qx^q}$$

के समरूप बीजीय व्यंजक को परिमेय *बीजीय भिन्न* कहते हैं।

यदि अंश की कोटि हर से कम हो, अर्थात्, यदि $p<q$, तो इसको *उचित भिन्न*, परंतु यदि $p \geqslant q$, तो इसको *अनुचित भिन्न* कहते हैं। किसी भी अनुचित भिन्न को साधारण भाग द्वारा उचित भिन्न में परिवर्तित किया जा सकता है। उदाहरणार्थ,

$$\frac{x^3+3x^2+4x+2}{x^2+2x+1}=x+1+\frac{x+1}{x^2+2x+1}.$$

आंशिक भिन्न : किसी भिन्न को उसकी रचक भिन्नों में अभिव्यक्त करने को आंशिक भिन्न में खण्डन करना कहते हैं।

अब हम किसी परिमेय बीजीय भिन्न को उसकी आंशिक भिन्न में खण्डन करने की कुछ विधियों पर विचार करेंगे।

3·3. यदि $F(x)/\phi(x)$ उचित बीजीय भिन्न है, तो यह दिखाया जा सकता है कि :

(i) यदि $\phi(x)$ का एक गुणनखंड $(x-a)$ एवं A अचर हो, तो संगत आंशिक भिन्न $A/(x-a)$ के समरूप होगी।

(ii) यदि $\phi(x)$ का एक गुणनखंड $(x-b)^r$ एवं $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_r$ अचर हों, तो संगत आंशिक भिन्न

$$\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\frac{B_3}{(x-b)^3}+\ldots+\frac{B_r}{(x-b)^r}$$

के समरूप होगी।

(iii) यदि $\phi(x)$ का एक गुणनखंड x^2+mx+n एवं C और D अचर हों, तो संगत आंशिक भिन्न

$$\frac{Cx+D}{x^2+mx+n}$$

के समरूप होगी।

(iv) यदि $\phi(x)$ का एक गुणनखंड $(x^2+mx+n)^r$ एवं $C_1, C_2, \ldots, C_r$ और $D_1, D_2, \ldots, D_r$,अचर हों, तो संगत आंशिक भिन्न

$$\frac{C_1x+D_1}{(x^2+mx+n)}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+mx+n)^2}+\ldots+\frac{C_rx+D_r}{(x^2+mx+n)^r},$$

के समरूप होगी।

3.4. आंशिक भिन्नों सें विघटन : किसी परिमेय बीजीय भिन्न को निम्न प्रकार से आंशिक भिन्नों में अभिव्यक्त कर सकते हैं :

(i) यदि निर्दिष्ट भिन्न $F(x)/\phi(x)$ उचित भिन्न न हो, तो $F(x)$ को $\phi(x)$ से विभाजित कर निम्न रूप में अभिव्यक्त करो:

$$\frac{F(x)}{\phi(x)} = Q(x) + \frac{f(x)}{\phi(x)};$$

इसमें $Q(x)$ भागफल तथा $f(x)/\phi(x)$ उचित भिन्न है।

(ii) $\phi(x)$ को उसके वास्तविक अभाज्य गुणनखंडों में विघटन करो।

(iii) $f(x)/\phi(x)$ को § 3·3 के नियमानुसार संगत आंशिक भिन्नों के योग के बराबर समीकृत कर दोनों पक्षों को $\phi(x)$ से गुणा करो।

(iv) नियम (iii) से प्राप्त सर्वसमिका में एक पक्ष की x की भिन्न 2 घातों के गुणांकों को दूसरे पक्ष की x की उन्हीं घातों के गुणांकों से समीकृत करो और फिर इस भाँति प्राप्त युगपत समीकरण को हल कर सर्वसमिका के अचरों का मान ज्ञात करो।

उदाहरण : व्यंजक $x^4/(x^4-1)$ का आंशिक भिन्नों में विघटन करो।

व्यंजक $x^4/(x^4-1)$ एक उचित भिन्न नहीं है; इस कारण अंश को हर से भाग कर प्राप्त करते हैं

$$\frac{x^4}{x^4-1}=1+\frac{1}{x^4-1}$$

अव § 3.3 के नियमानुसार कल्पना करो कि

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

दोनों पक्षों को x^4-1 से गुणा करने पर प्राप्त होता है

$$1=A(x^3+x^2+x+1)+B(x^3-x^2+x-1)+(Cx^3-Cx+Dx^2-D).$$

दोनों पक्षों में x^3, x^2, x के गुणांकों और अचर पद को समीकृत करने पर प्राप्त होता है

$$0=A+B+C,$$
$$0=A-B+D,$$
$$0=A+B-C,$$
$$1=A+B-D,$$

इन समीकरणों को हल करने पर प्राप्त होता है

$A=1/4$, $B=-1/4$, $C=0$, $D=-1/2$.

अतः

$$\frac{x^4}{x^4-1}=1+\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{2(x^2+1)}.$$

प्रश्नावली

आंशिक भिन्नों में विघटन करो :

1. $\dfrac{x+1}{(x-1)(x+4)}$.

2. $\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)(x-1)^2}$.

3. $\dfrac{6x^2+5x-2}{2x^3-x^2-x}$. [उत्कल, 1949]

4. $\dfrac{4+7x}{(2+3x)(1+x)^2}$ [लखनऊ, 1955]

5. $\dfrac{2x^2-11x+5}{(x-3)(x^2+2x-5)}$ [गोरखपुर, 1962]

6. $\dfrac{x^2}{(x^2-1)(x^2+2)}$ [लखनऊ, 1948]

7. $\dfrac{8}{(x-1)^3(x+1)}$ [लखनऊ प्रा०, 1948]

3·5. अनुच्छेद 3.4 में वर्णित नियमों की सहायता से सब ही परिमेय बीजीय भिन्नों का उनकी आंशिक भिन्नों में विघटन किया जा सकता है। परंतु संख्यात्मक अभिगणना के परिश्रम को बचाने के लिए सधारणतया निम्नलिखित नियमों का उपयोग करते हैं :

(क) हर के गुणनखंड $(x-a)$ की संगत भिन्न $A/(x-a)$ प्राप्त करने के लिए $(x-a)$ गुणनखंड के अतिरिक्त शेष भिन्न में $x=a$ लिखते हैं।

कारण : माना कि

$$\phi(x)=(x-a)\,\psi(x)\,;$$

तब
$$\frac{f(x)}{\phi(x)}=\frac{f(x)}{(x-a)\,\psi(x)},$$

$$=\frac{A}{x-a}+\text{आंशिक भिन्न},$$

जिसके हर का $(x-a)$ गुणनखंड नहीं है। दोनों पक्षों को $(x-a)$ से गुणा करने पर प्राप्त होता है

$$\frac{f(x)}{\psi(x)}=A+(x-a)\times \text{आंशिक भिन्न},$$

जिसके हर का $(x-a)$ गुणनखंड नहीं है।

इस सर्वसमिका में $x=a$ प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$\frac{f(a)}{\psi(a)}=A,$$

अथवा

$$\frac{A}{x-a} = \frac{f(a)}{(x-a)\psi(a)} .$$

यह नियम को प्रमाणित करता है।

उदाहरण : व्यंजक $(1+3x+2x^2)/\{(1-2x)(1-x)(1+x)\}$ *का आंशिक भिन्नों में विघटन करो।*

कल्पना करो कि

$$\frac{1+3x+2x^2}{(1-2x)(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x} .$$

गुणनखंड $(1-2x)$ के अतिरिक्त शेष भिन्नों में $1-2x=0$, अर्थात् $x=1/2$ रखने पर प्राप्त होता है

$$A = \frac{1+3\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})} = 4.$$

इसी भाँति

$$B = \frac{1+3+2}{(1-2)(2)} = -\frac{6}{2} = -3;$$

और

$$C = \frac{1-3+2}{(1+2)(2)} = 0.$$

अतः

$$\frac{1+3x+2x^2}{(1-2x)(1-x)(1+x)} = \frac{4}{(1-2x)} - \frac{3}{1-x} .$$

(ख) हर के गुणनखंड $(x-b)^r$ की संगत भिन्न $B_r/(x-b)^r$ प्राप्त करने के लिए गुणनखंड $(x-b)^r$ के अतिरिक्त शेष भिन्न में $x=b$ लिखते हैं।

स्पष्टतया इसकी सहायता से केवल आंशिक भिन्न $B_r/(x-b)^r$ को ज्ञात कर सकते हैं। शेष आंशिक भिन्नों को अन्य विधियों द्वारा ज्ञात करना पड़ता है।

इस नियम को पूर्वोक्त विधि द्वारा प्रमाणित किया जा सकता है।

(ग) यदि निर्दिष्ट भिन्न के हर में पुनरावृत्त एक घातीय गुणनखंड हों, तो उनकी संगत भिन्न को लम्बे भाग की विधि से ज्ञात करते हैं।

उदाहरण : व्यंजक $x^4/(x-1)^4(x+1)$ *का आंशिक भिन्नों में विघटन करो।* [आगरा, 1951]

निर्दिष्ट भिन्न में $x-1=y$ रखने पर प्राप्त होता है

$$\frac{x^4}{(x-1)^4(x+1)}=\frac{(1+y)^4}{y^4(2+y)}=\frac{1+4y+6y^2+4y^3+y^4}{y^4(2+y)}. \quad (1)$$

अंश को $2+y$ से भाग करने पर, जब तक कि उसके शेषफल में y^4 एक गुणनखंड के रूप में आ जाय, प्राप्त होता है

$$\frac{1+4y+6y^2+4y^3+y^4}{(2+y)}=\frac{1}{2}+\frac{7y}{4}+\frac{17}{8}y^2+\frac{15}{16}y^3+\frac{y^4}{16(2+y)}.$$

अतः

$$\frac{x^4}{(x-1)^4(x+1)}=\frac{1}{2y^4}+\frac{7}{4y^3}+\frac{17}{8y^2}+\frac{15}{16y}+\frac{1}{16(2+y)},$$

$$=\frac{1}{2(x-1)^4}+\frac{7}{4(x-1)^3}+\frac{17}{8(x-1)^2}$$

$$+\frac{15}{16(x-1)}+\frac{1}{16(x+1)}.$$

(घ) यदि हर में दो या दो से अधिक अपुनरावृत्त द्विघातीय गुणनखंड हों, तो उनकी संगत भिन्नों को निम्न उदाहरणों की भाँति ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण : (i) *व्यंजक $(x^3+x^2+1)/\{(x^2+2)(x^2+3)\}$ का आंशिक भिन्नों में विघटन करो।*

कल्पना करो कि

$$\frac{x^3+x^2+1}{(x^2+2)(x^2+3)}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}; \quad (1)$$

दोनों पक्षों को $(x^2+2)(x^3+3)$ से गुणा करने पर प्राप्त होता है

$$x^3+x^2+1=(Ax+B)(x^2+3)+(Cx+D)(x^2+2). \quad (2)$$

संबंध (2) में $x^2+2=0$, अर्थात् $x^2=-2$ रखने पर प्राप्त होता है

$$(-2)x+(-2)+1=(Ax+B)(-2+3),$$

अथवा $$-2x-1=Ax+B.$$

इसी भाँति (2) में $x^2=-3$ रखने पर प्राप्त होता है

$$3x+2=Cx+D.$$

अतः

$$\frac{x^3+x^2+1}{(x^2+2)\ (x^2+3)}=\frac{3x+2}{x^2+3}-\frac{2x+1}{x^2+2}\ .$$

(ii) व्यंजक $(x^2+1)^2/(x^4+x^2+1)$ का आंशिक भिन्नों में विघटन करो।
[लखनऊ प्रा०, 1955]

निर्दिष्ट भिन्न

$$\frac{(x^2+1)^2}{x^4+x^2+1}=1+\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\ . \quad (1)$$

कल्पना करो कि

$$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}\ ; \quad (2)$$

अथवा $x^2=(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$. (3)

संबंध (3) में $x^2=-x-1$ रखने पर प्राप्त होता है

$$-x-1=(Ax+B)(-2x)=-2A\ (-x-1)-2Bx\ . \quad (4)$$

क्योंकि (4) एक सर्वसमिका है; अतएव

$$-1=2A-2B \text{ और } -1=2A\ .$$

अतः

$$A=-\tfrac{1}{2} \text{ और } B=0\ .$$

पुनः, (3) में $x^2=x-1$ रखने पर प्राप्त होता है

$$x-1=(Cx+D)\ (2x)=2C(x-1)+2Dx\ . \quad (5)$$

अतएव $1=2C+2D$ और $-1=-2C$.

अथवा $C=1/2$ और $D=0$.

अतः

$$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=-\frac{x}{2(x^2+x+1)}+\frac{x}{2(x^2-x+1)}\ .$$

और अतएव

$$\frac{(x^2+1)^2}{x^4+x^2+1}=1-\frac{x}{2(x^2+x+1)}+\frac{x}{2(x^2-x+1)}\ .$$

(ङ) यदि हर के कुछ गुणनखंडों की संगत आंशिक भिन्नों को उपरोक्त विधि द्वारा ज्ञात किया जा सके, तो शेष को ज्ञात करने के लिए साधारणतया प्रतिस्थापन विधि का उपयोग करते हैं। यदि भिन्न उचित हो, तो अज्ञात अचर को ज्ञात करने के लिए x से गुणा करने के पश्चात् उसको अनंत की ओर प्रवृत्त कर एक समीकरण को प्राप्त करना सुविधाजनक रहता है।

उदाहरण : व्यंजक $(x^3+5x^2+x)/\{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)\}$ *का आंशिक भिन्नों में विघटन करो।*

कल्पना करो कि

$$\frac{x^3+5x^2+x}{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)}=\frac{x^3+5x^2+x}{(x+1)^2(x^2+1)(x^2-x+1)},$$

$$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{x^2-x+1}. \quad (1)$$

दोनों पक्षों को $(x+1)^2\ (x^2+1)\ (x^2-x+1)$ से गुणा करने पर प्राप्त होता है

$$x^3+5x^2+x=A(x+1)(x^2+1)(x^2-x+1)+B(x^2+1)(x^2-x+1)$$
$$+(Cx+D)(x+1)^2(x^2-x+1)+(Ex+D)(x+1)^2(x^2+1), \quad (2)$$

जो कि एक सर्वसमिका है।

सर्वसमिका (2) में क्रमशः $x=-1; x^2=-1; x^2=x-1$ और $x=0$ रखने पर प्राप्त होता है

$$3 = 6B, \quad (3)$$
$$-5 = 2(Cx+D), \quad (4)$$
$$2 = Ex+F, \quad (5)$$
$$0 = A+B+D+F. \quad (6)$$

इनसे क्रमशः प्राप्त होता है

$$B=1/2, \quad C=0,$$
$$D=-5/2, \quad E=0,$$
$$F=2, \quad A=0.$$

अतः

$$\frac{x^3+5x^2+x}{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)}=\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{5}{2(x^2+1)}+\frac{2}{x^2-x+1}.$$

टिप्पणी। सर्वसमिका (1) को x से गुणा कर उसको अनन्त की ओर प्रवृत्त कराने पर प्राप्त होता है:

$$0 = A + C + E.$$

इसका (6) के स्थान में प्रयोग किया जा सकता है।

प्रश्नावली

आंशिक भिन्नों में विघटन करो:

1. $\dfrac{x^3-5}{(x-1)(x+1)(x-2)}$.

2. $\dfrac{3x^3-8x^2+10}{(x-1)^4}$.

3. $\dfrac{9x^4}{(x-1)(x+2)^2}$.

4. $\dfrac{x^2+1}{(x-2)^3(x-3)}$.

5. $\dfrac{6+13x-3x^3}{(x-1)(x+1)^3(x+2)}$.

6. $\dfrac{2x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}$. [इलाहाबाद, 1953]

7. $\dfrac{x^2+x}{(x-1)^2(x^2+4)}$. [इलाहाबाद, 1949]

8. $\dfrac{2x^3+2x^2+4x+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$. [इलाहाबाद, 1959]

9. $\dfrac{x+1}{(x-1)^2(x+2)^2}$.

10. $\dfrac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2(x+2)}$. [पंजाब, 1937]

3·6. आंशिक भिन्नों के अनुप्रयोग : आंशिक भिन्नों के निम्नलिखित दो महत्वपूर्ण अनुप्रयोग हैं:—

(i) परिमेय भिन्न का आरोही श्रेणी में विस्तार कर सकते हैं। इसके लिए सर्वप्रथम भिन्न को आंशिक भिन्नों में विघटन करते हैं और तत्पश्चात् प्रत्येक भिन्न का द्विपद-सिद्धांत की सहायता से विस्तार करते हैं।

उदाहरण : *व्यंजक $(7+x)/\{(1+x)(1+x^2)\}$ के x की आरोही घातांकों के विस्तार में x^r का गुणांक ज्ञात करो।* [आगरा, 1961]

पूर्वोक्त विधि से आंशिक भिन्न में विघटन करने पर प्राप्त होता है:

$$\frac{7+x}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{3}{1+x}-\frac{3x-4}{1+x^2},$$

$$=3(1+x)^{-1}-(3x-4)(1+x^2)^{-1},$$

$$=3\{1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots\}$$

$$-(3x-4)\{1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots\},$$

द्विपद-प्रमेय से विस्तार करने पर, जब कि $x<1$ ।

$\therefore x^{2n}$ का गुणांक $=3+(-1)^n 4$,

और x^{2n+1} का गुणांक $=-3-3(-1)^n$, अर्थात् $=-3+3(-1)^{n+1}$

अतः x^r का गुणांक $=3+4(-1)^{r/2}$, जब कि r सम है;

$=-3+3(-1)^{(r+1)/2}$, जब कि r विषम है।

(ii) कुछ उन श्रेणियों का योगफल कर सकते हैं जिनके पद परिमेय भिन्न हों। इसके लिए हम श्रेणी के प्रत्येक पद को दो या दो से अधिक ऐसी भिन्न के अंतर के रूप में प्रकट करते हैं जिससे कि योगफल लेने पर उत्तरोत्तर पद कट जायें।

उदाहरण : *यदि $0<x<1$, तो श्रेणी*

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)}+\frac{x^2}{(1-x^3)(1-x^5)}+\frac{x^4}{(1-x^5)(1-x^7)}+\ldots$$

का योगफल ज्ञात करो। [इलाहाबाद, 1960]

श्रेणी का r^{th} पद

$$Tr=\frac{x^{2r-2}}{(1-x^{2r-1})(1-x^{2r+1})}=\frac{z}{(1-xz)(1-x^3z)},$$

जब कि $z=x^{2r-2}$ । इसको यदि z की भिन्न मान लें तो § 3·5 (i) से प्राप्त होता है।

$$\frac{z}{(1-xz)(1-x^3z)}=\frac{1/x}{(1-xz)(1-x^2)}+\frac{1/x^3}{(1-1/x^2)(1-x^3z)},$$

$$=\frac{1}{x(1-x^2)}\left(\frac{1}{1-x^{2r-1}}-\frac{1}{1-x^{2r+1}}\right).$$

अतः श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल

$$S_n=T_1+T_2+T_3+\ldots+T_n,$$

$$=\frac{1}{x(1-x^2)}\left\{\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^3}\right)+\left(\frac{1}{1-x^3}-\frac{1}{1-x^5}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{1-x^{2n-1}}-\frac{1}{1-x^{2n+1}}\right)\right\},$$

$$=\frac{1}{x(1-x^2)}\left\{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2n+1}}\right\}.$$

क्योंकि $\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ x^{2n+1}=0,$

$$S_\infty=\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ S_n=\frac{1}{x(1-x^2)}\left\{\frac{1}{1-x}-1\right\},$$

$$=\frac{1}{(1-x^2)(1-x)}.$$

प्रश्नावली

x को आरोही घातांकों में विस्तार कर व्यापक पद ज्ञात करो :

1. $\dfrac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}.$ [इलाहाबाद, 1957]

2. $\dfrac{x^2+7x+3}{x^2+7x+10}.$

3. $\dfrac{x-4}{(x-2)(x+1)^2}.$ [लखनऊ प्रा०, 1956]

4. $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}.$ [लखनऊ, 1956]

x^r का गुणांक ज्ञात करो :

5. $\dfrac{2x-4}{(1-x^2)(1-2x)}$.

6. $\dfrac{4+7x}{(2+3x)(1+x)^2}$.

7. $\dfrac{7+x}{(1+x)(1+x^2)}$. [आगरा, 1961]

मान ज्ञात करो :

8. $\sum\limits_{r=1}^{n} \dfrac{2r+1}{r^2(r+1)^2}$.

9. $\sum\limits_{r=1}^{n} \dfrac{5r^2+12r+8}{r^2(r+1)^3(r+2)^3}$.

10. $\dfrac{1}{(1-x)\ (2-x)^2}$ को आंशिक भिन्न में अभिव्यक्त कर x की आरोही घातांकों में विस्तार करो। इस विस्तार के प्रथम n गुणांकों का योगफल ज्ञात करो। [आन्ध्र, 1950]

विविध प्रश्नावली

आंशिक भिन्नों में विघटन करो :

1. $\dfrac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

2. $\dfrac{6x^3+5x^2-7}{3x^2-2x-1}$. [उत्कल, 1954]

3. $\dfrac{x^4-3x^3-3x^2+10}{(x+1)^2(x-3)}$. [इलाहाबाद, 1960]

4. $\dfrac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}$. [उत्कल, 1962]

5. $\dfrac{2x+1}{x^2(x+2)^3(x-1)}$. [पंजाब, 1939]

6. $\dfrac{1}{x^4+1}$. [गोरखपुर, 1960]

7. $\dfrac{x^3}{(x+2)^2(x^2+2)}$. [वाराणसी, 1952]

8. $\dfrac{x^4+x+1}{(x-1)(x^4+x^2+1)}$. [लखनऊ प्रा०, 1951]

9. $\dfrac{x^3}{(x-1)^4\ (x^2-x+1)}$. [राजस्थान, 1958]

10. $\dfrac{x^6}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}$. [पंजाब, 1938]

11. $\dfrac{5-9x}{(1-3x)^3(1+x)}$. [इलाहाबाद, 1948]

12. $\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2(x-2)(x^2+1)}$. [राजस्थान, 1961]

13. $\dfrac{(x^2+1)^2}{x^4+x^2+1}$. [लखनऊ, 1952]

14. $\dfrac{2x^3}{(x-1)^3(x+4)}$. [अनामलाई, 1949]

15. $\dfrac{5x^3+6x^2+5x}{(x^2-1)(x+1)^3}$. [नागपुर, 1954]

16. $\dfrac{9x^3-24x^2+48x}{(x-2)^4(x+1)}$. [रजास्थान, 1962]

निम्नलिखित व्यंजकों का x की आरोही घातांक में विस्तार कर x^r का गुणांक ज्ञात करो :

17. $\dfrac{5}{3-x-2x^2}$. [पटना, 1949]

18. $\dfrac{3+2x-x^2}{(1+x)(1-4x)}$. [सागर, 1948]

19. $\dfrac{x^2+2}{(x+1)^2\ (x+2)(x+3)}$. [अनामलाई, 1950]

20. $\dfrac{x-2}{(x+2)\ (x-1)^2}$ का आंशिक भिन्नों में विघटन करो और दिखाओ कि द्विपद-विस्तार में x^n का गुणांक

$$\frac{4}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{9}(3n+7)$$

है। [राजस्थान, 1949]

21. यदि $\dfrac{1}{x(x-2)\ (x-1)^n}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{\phi\ (x)}{(x-1)^n}$,

तो A, B और , का मान ज्ञात करो। [लखनऊ, 1953]

22. यदि $\dfrac{x^2}{(x-\alpha)\ (x-\beta)(x-\gamma)}=\dfrac{A}{x-\alpha}+\dfrac{B}{x-\beta}+\dfrac{C}{x-\gamma}$,

तो A, B और C ज्ञात करने का नियम (विना प्रमाण) दो। इससे अथवा अन्य किसी प्रकार से उनको ज्ञात करो और अतएव निगमन करो कि

$$\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=0.$$

[आगरा, 1938]

निम्नलिखित श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात करो:

23. $\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)}+\dfrac{x}{(1+x^2)(1+x^3)}+\dfrac{x^2}{(1+x^3)(1+x^4)}+\dots$

[उत्कल, 1962]

24. $\dfrac{x(1-ax)}{(1+x)(1+ax)\ (1+a^2x)}+\dfrac{ax(1-a^2x)}{(1+ax)\ (1+a^2x)\ (1+a^3x)}+\dots$

[इलाहाबाद, 1959]

25. उस श्रेणी के प्रथम m पदों का योगफल ज्ञात करो जिसका

r वाँ पद$=\dfrac{x^r(1+x^{r+1})}{(1-x^r)\ (1-x^{r+1})\ (1-x^{r+2})}$.

[गोरखपुर, 1962]

अध्याय 4

असमता

4.1. असमता का समता की भाँति बीजगणित में एक महत्वपूर्ण स्थान है और इसका प्रयोग प्रायः आता है। इस अध्याय में हम असमता के अध्ययन में उपयोगी विभिन्न महत्वपूर्ण विधियों की समीक्षा करेंगे। सदैव की भाँति a, b, c इत्यादि से संख्याओं को सूचित किया जायेगा और इनको धन और वास्तविक माना जायेगा जब तक कि इसके विरुद्ध कुछ न कहा जाय।

4·2. परिभाषा : कल्पना करो कि a और b दो संख्याएँ हैं और $a-b$ धन है; तो हम कहते हैं कि संख्या a संख्या b से अधिक है और इस कथन को $a>b$ संकेत द्वारा निरूपित करते हैं। जब $a-b$ ऋण होता है, तो कहते हैं कि संख्या a संख्या b से कम है और इसको $a<b$ से निरूपित करते हैं। उदाहरणार्थ, $1>-2$ क्योंकि $1-(-2)$ धन है और $-3<-2$ क्योंकि $-3-(-2)$ ऋण है।

$1>-2$ और $-3<-2$ के समरूप व्यंजकों को, जिनमें चिह्न $>$ अथवा $<$ का प्रयोग किया गया हो, असमता कहते हैं। चिह्न $>$ और $<$ को असमता के चिह्न कहते हैं।

4·21. प्रारम्भिक विचार : असमता के अधिकतर प्रारम्भिक सिद्धांत समीकरण के समान हैं।

(i) *किसी असमता के दोनों पक्षों को एक ही धन राशि से बढ़ाने, घटाने, गुणा अथवा भाग करने से वह रूपांतरित नहीं होती।*

क्योंकि, यदि $a > b$, तो असमता की परिभाषा से स्पष्ट है कि

$$a+c>b+c,$$
$$a-c>b-c,$$
$$ac>bc,$$
$$a/c>b/c, \quad c\neq o.$$

(ii) *किसी असमता पद का पक्षांतरण करने पर उसके चिह्न में रूपांतरण हो जाता है।*

क्योंकि, यदि $a-c>b$, तो दोनों पक्षों में c जोड़ने पर प्राप्त होता है

$$a > b + c.$$

(iii) किसी असमता के पक्षों का पक्षांतरण करने पर असमता के चिह्न में परिवर्तन हो जाता है।

क्योंकि, यदि $a > b$, तो स्पष्टतया $b < a$.

(iv) किसी असमता के पक्षों को एक ही ऋण संख्या से गुणा करने पर असमता के चिह्न में रूपांतरण हो जाता है।

क्योंकि, यदि $a > b$, $a - b$ धन और $-c\ (a-b)$ ऋण है। अतः

$$-ac < -bc.$$

विशेषतया, यदि $a > b$, तो $-a < -b$.

(v) समान चिह्न की असमताओं के संगत पक्षों को जोड़ने अथवा गुणा करने पर प्राप्त असमता भी उनके चिह्न की होती है।

कल्पना करो कि

$$a_1 > b_1,\ a_2 > b_2,\ a_3 > b_3, \ldots\ a_n > b_n;$$

तो क्योंकि

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) &- (b_1 + b_2 + b_3 \ldots + b_n)\\ &= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \ldots + (a_n - b_n),\\ &> 0.\end{aligned}$$

अतः, परिभाषा से

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n > b_1 + b_2 + b_3 \ldots + b_n. \qquad \ldots (1)$$

पुनः, क्योंकि

$$\begin{aligned}a_1 a_2 a_3 \ldots a_n &> b_1 a_2 a_3 \ldots a_n,\\ &> b_1 b_2 a_3 \ldots a_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &> b_1 b_2 b_3 \ldots b_n,\end{aligned}$$

अतः

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n > b_1 b_2 b_3 \ldots b_n.$$

(vi) घातीय एवं लघुगणकीय फलनों के गुणों से स्पष्ट है कि, यदि $a > b$, तो

$$e^a > e^b,$$

और

लघु $a >$ लघु b।

(vii) *यदि किसी असमता के दोनों पक्षों को एक ही धन घातांक से उच्च किया जाय, तो असमता का चिन्ह अरूपांतरित रहता है; परन्तु यदि दोनों पक्षों को एक ही ऋण घातांक से उच्च किया जाय, तो असमता के चिन्ह में रूपांतरण हो जाता है।*

कल्पना करो कि $a > b$; तो लघुगणकीय फलन के गुणों से स्पष्ट है कि

$$\text{लघु } a > \text{लघु } b \quad ,$$

अथवा,
$$n \text{ लघु } a > n \text{ लघु } b,$$

अथवा
$$\text{लघु } a^n > \text{लघु } b^n \; ,$$

अथवा,
$$a^n > b^n .$$

इसी भाँति
$$a^{-n} < b^{-n}$$

(viii) *जब किसी असमता के दोनों पक्ष a और b में सममित होते हैं, तो $a > b$ मानने से व्यापकता में कोई त्रुटि नहीं आती।* क्योंकि, यदि $b > a$, तो b के स्थान पर a और a के स्थान पर b लिखा जा सकता है और, सममित के कारण असमता अरूपांतरित रहेगी। इसी प्रकार यदि कोई असमता $a, b, c, \ldots$, में सममित है, तो हम कल्पना कर सकते हैं कि $a > b > c > \ldots$ ।

(ix) *उन असमताओं की सत्यता, जिनमें कि दोनों पक्षों के अंतर के गुणनखंड किये जा सकें, प्रत्येक पृथक् गुणनखंड के चिन्ह पर विचारकर सिद्ध की जा सकती है। कभी 2 गुणनखंडों का विशेष चुनाव उपयोगी होता है।*

4·22. उदाहरण : (i) *दिखाओ कि*

$$x^3 + 13\,a^2\,x > 5\,ax^2 + 9\,a^3,$$

जब कि $x > a$.

व्यंजक

$$\begin{aligned} & x^3 + 13\,a^2x - 5ax^2 - 9a^3 \\ &= x^2(x-a) - 4ax(x-a) + 9a^2\;(x-a), \\ &= (x-a)\,\{(x-2a)^2 + 5a^2\}, \end{aligned}$$

जो कि धन है। अतः

$$x^3 + 13\,a^2x > 5\,ax^2 + 9\,a^3.$$

(ii) *यदि a, b, c, d हरात्मक श्रेणी में हैं, तो दिखाओ कि*

$$a + d > \; + c.$$

कल्पना करो कि a, b, c, d के व्युत्क्रम $p-3q, p-q, p+q, p+3q$ हैं; तो सिद्ध करना है कि

$$\frac{1}{p-3q}+\frac{1}{p+3q}>\frac{1}{p-q}+\frac{1}{p+q},$$

अर्थात्, $$\frac{2p}{p^2-9q^2}>\frac{2p}{p^2-q^2},$$

जो कि सत्य है; क्योंकि $p^2-9q^2<p^2-q^2$.

अतः साध्य प्रमाणित हो जाता है।

(iii) *सिद्ध करो कि*

$$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)>0$$

क्योंकि असमता a, b, c में सममित है, हम कल्पना कर सकते हैं कि $a>b>c$

असमता $a>b$ से प्राप्त होता है

$$a-c>b-c,$$

और $$a^2(a-b)>b^2(a-b).$$

इन असमताओं के संगत पक्षों को गुणा करने पर प्राप्त होता है

$$a^2(a-b)(a-c)>b^2(a-b)(b-c),$$

अथवा $$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)>0. \quad (1)$$

पुनः, क्योंकि $a>b>c$ तथा $c-a$ और $c-b$ दोनों ऋण हैं,

$$\therefore c^2(c-a)(c-b)>0. \quad (2)$$

असमतायें (1) और (2) को जोड़ने पर प्राप्त होता है

$$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)>0.$$

(iv) *यदि n धन पूर्ण संख्या हो, तो दिखाओ कि*

$$(n!)^2>n^n. \qquad \text{[लखनऊ, 1953]}$$

स्पष्टतया, जब $1<r<n$, तो

$$n-r>(n-r)/r,$$

अर्थात्, $$r(n-r+1)>n. \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

समता (1) में उत्तरोत्तर $r=2, 3, 4, \ldots, (n-1)$ रखने पर प्राप्त होता है

$$2(n-1) > n,$$
$$3(n-2) > n,$$
$$4(n-3) > n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(n-2)3 > n.$$
$$(n-1)2 > n.$$

इन असमताओं के संगत पक्षों को गुणा करने पर प्राप्त होता है

$$\{2.3.4\ \ldots\ldots\ (n-1)\}^2 > n^{n-2},$$

अर्थात्, $$\{(n-1)!\}^2 > n^{n-2},$$

अर्थात्, $$(n!)^2 > n^n.$$

प्रश्नावली

यदि a और b धन हों. तो सिद्ध करो कि

1. $a^3 - 2b^3 > 3ab^2$.

2. $a^3b + ab^3 < a^4 + b^4$.

3. यदि $x > a$, दिखाओ कि

$x^3 + 8a^2x > 5ax^2 + 4a^3$.

4. सिद्ध करो कि

$2(ab + 1) > (a+1)(b+1)$, जब कि $a > 1, b > 1$ ।

5. यदि x कोई वास्तविक संख्या हो तो $x^3 + 1$ और $x^2 + x$ में से कौन बड़ा है ?

6. x के किस मान के लिए

$x^3 + 25x > 8x^2 + 26$?

7. x का वह महत्तम मान ज्ञात करो जिसके लिए

$6x^2 + 10 > x^3 + 13x$.

8. सिद्ध करो कि

$$\frac{b^3 + c^3}{b + c} + \frac{c^3 + a^3}{c + a} + \frac{a^3 + b^3}{a + b} > ab + bc + ca.$$

9. यदि n एक धन पूर्ण संख्या है और $x < 1$, तो दिखाओ कि

$$\frac{1-x^{n+1}}{n+1} < \frac{1-x^n}{n}.$$ [इलाहाबाद, 1960]

10. सिद्ध करो कि

$$(x^4+y^4)\ (x^5+y^5) < 2(x^9+y^9).$$

11. यदि $x > y$, तो दिखाओ कि

$$x^x\ y^y > x^y\ y^x,$$

और $$\text{लघु}\ \frac{x}{y} > \text{लघु}\ \frac{1+x}{1+y}.$$

12. यदि x धन है तो दिखाओ कि

लघु $(1+x) < x$ और $> x/(1+x)$.

13. दिखाओ कि

$$\text{लघु}_e\ (1+n) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \ldots\ \frac{1}{n}.$$ [इलाहाबाद, 1949]

14. यदि $m > n$. सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{m}\ \text{लघु}\ (1+a^m) < \frac{1}{n}\ \text{लघु}\ (1+a^n).$$

15. दिखाओ कि निम्नलिखित व्यंजक धन हैं:

(i) $(a-b)\ (a-c)+(b-c)\ (b-a)+(c-a)\ (c-b)$.

(ii) $a(a-b)\ (a-c)+b\ (b-c)\ (b-a)+c(c-a)\ (c-b)$.

4·3. समांतर और गुणोत्तर माध्य : प्रारम्भिक बीजगणित में समांतर एवं गुणोत्तर माध्य की परिभाषा का ज्ञान कराया जा चुका है। अब हम इनसे संबंधित दो महत्वपूर्ण प्रमेय की समीक्षा करेंगे। यह प्रमेय असमता के अध्ययन में बहुत उपयोगी हैं।

प्रमेय 1 : *दो वास्तविक धन असमान संख्याओं का समांतर माध्य उनके गुणोत्तर माध्य से बड़ा होता है ।*

कल्पना करो कि x और y दो असमान वास्तविक संख्या हैं; तो

$$(x - y)^2 > 0,$$

अथवा $$x^2 - 2xy + y^2 > 0,$$

अथवा $$x^2 + y^2 > 2xy.$$

x^2 और y^2 के स्थान पर a और b रखने पर हम देखते हैं कि a और b जब वास्तविक. धन और असमान हैं, तो

$$\tfrac{1}{2}(a + b) > \sqrt{(ab)}.$$

प्रमेय 2 : n वास्तविक धन संख्याओं का जो कि सब एक दूसरे के समान नहीं हैं, समांतर माध्य गुणोत्तर माध्य से बड़ा होता है ।

इस प्रमेय के प्रमाण के लिए दो निम्नलिखित स्थितियों पर विचार करना आवश्यक है :

स्थिति 1 : $n = 2^k$ और k पूर्ण संख्या है।

कल्पना करो कि n संख्याएँ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ हैं तो प्रमेय 1 से

$$a_1 a_2 < \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2,$$

और $$a_3 . a_4 < \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2;$$

अतः $$a_1 a_2 a_3 a_4 < \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2.$$

परंतु प्रमेय 1 से–

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right) < \left\{\frac{(a_1 + a_2)/2 + (a_3 + a_4)/2}{2}\right\}^2,$$

$$= \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^2.$$

अतः

$$a_1 a_2 a_3 a_4 < \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4.$$

अतएव प्रमेय $k = 2$ के लिए सत्य है।

उपरोक्त विधि की $k-2$ बार पुनरावृत्ति कर दिखाया जा सकता है कि

$$a_1 \, a_2 \, a_3 \ldots a_n < \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \right)^n$$

जब कि $n = 2^k$.

अत: प्रमेय k के समस्त पूर्ण सांख्यिक मान के लिए सत्य है।

स्थिति 2 : जब $n \neq 2^k$ और k पूर्वगत स्थिति की भाँति पूर्ण संख्या है। अब इस प्रकार की पूर्ण संख्या r लो कि $n + r = 2^k$. तथा संख्याओं

$$a_1, a_2, a_3 \ldots . a_n. A, A, A \ldots, A.$$

जिसमें $a_1 . a_2 . a_3 \ldots . a_n$. का समान्तर माध्यमान A,r बार आता है, पर विचार करो। इन संख्याओं पर स्थिति 1 के फल का अनुप्रयोग करने पर प्राप्त होता है कि

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + rA}{n+r} > (a_1 . a_2 . a_3 \ldots a_n A^r)^{\frac{1}{n+r}}$$

परंतु, क्योंकि

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots . + a_n = nA,$$

वाम पक्ष व्यंजक A के बराबर है। अतएव

$$A^{n+r} > a_1 \, a_2 \, a_3 \ldots a_n \, A^r,$$

अथवा $$A^n > a_1 \, a_2 \, a_3 \ldots a_n,$$

अथवा $$a_1 \, a_2 \, a_3 \ldots a_n < \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n}{n} \right)^n .$$

स्थिति 1 और 2 से स्पष्ट है कि n के प्रत्येक मान के लिए

$$a_1 \, a_2 \, a_3 \ldots a_n < \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n}{n} \right)^n,$$

अर्थात्. $$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} > (a_1 \, a_2 \, a_3 \ldots a_n)^{1/n}$$

टिप्पणी । यदि प्रमेय (2) में सब संख्याएं एक दूसरे के बराबर हों, तो उपरोक्त फल असमता से समता में रूपांतरित हो जाता है. अर्थात्,

संख्याओं का समांतर माध्य = गुणोत्तर माध्य।

4.31. महत्वपूर्ण निष्कर्ष : कल्पना करो कि $x, y, z, \ldots, w, n$ धन चर और c एक अचर राशि है; तो अनुच्छेद 4·3 के प्रमेय 2 से निम्नलिखित दो महत्वपूर्ण निष्कर्ष का निगमन किया जा सकता है :

(i) यदि $x+y+z+\ldots+w=c$, तो $xyz\ldots w$ का मान महत्तम होगा, जब कि $x=y=z=\ldots=w=c/n$, और यह महत्तम मान $=(c/n)^n$ ।

(ii) यदि $xyz\ldots w=c$, तो $x+y+z+\ldots+w$ का मान लघुतम होगा जब कि $x=y=z=\ldots=w=c^{1/n}$, और यह लघुतम मान $=nc^{1/n}$ ।

4·32. पुनरावृत्त गुणनखंड : व्यंजक $a^m b^n c^p \ldots$ का महत्तम मान ज्ञात करना जब कि $a+b+c+\ldots$ अचर है और $m, n, p, \ldots$ ज्ञात धन पूर्ण संख्या है।

क्योंकि $m, n, p, \ldots$ अचर हैं, $a^m b^n c^p$ का मान महत्तम होगा जब कि

$$\left(\frac{a}{m}\right)^m \left(\frac{b}{n}\right)^n \left(\frac{c}{p}\right)^p \ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

का मान महत्तम है। इसमें m गुणनखंड a/m के बराबर हैं, n गुणनखंड b/n के बराबर हैं, p गुणनखंड c/p के बराबर हैं, इत्यादि 2। इन गुणनखंड का योगफल

$$=m(a/m)+n(b/n)+p(c/p)+\ldots\ldots\ldots,$$
$$=a+b+c+\ldots,$$

जो कि अचर है। अतएव (1) महत्तम होगा जब कि सब गुणनखंड एक दुसरे के बराबर होंगे, अर्थात्, जब कि

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}=\ldots=\frac{a+b+c+\ldots}{m+n+p+\ldots}.$$

इस प्रकार $a^m b^n c^p \ldots$ का महत्तम मान

$$m^m n^n p^p \ldots \left(\frac{a+b+c+\ldots}{m+n+p+\ldots}\right)^{m+n+p+\ldots} \text{ है।}$$

4·33. महत्तम एवं लघुतम : पूर्वगत अनुच्छेद का प्रयोग महत्तम एवं लघुतम के प्रश्नों में किया जा सकता है। परन्तु द्विघात फलन और कुछ अन्य स्थितियोंमें भी निर्दिष्ट फलन को एक अचर और एक चर के वर्ग के योगफल के रूप में अभिव्यक्त करना अधिक सुविधा जनक रहता है।

उदाहरण : (i) *सिद्ध करो कि*

$$a^2b+b^2c+c^2a>3\,abc.$$ [वाराणसी, 1955]

अनुच्छेद 4·3 से

$$\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3}>(a^3b^3c^3)^{\frac{1}{3}},$$

अथवा $a^2b+b^2c+c^2a \quad >3\,a\,b\,c.$

(ii) *यदि a, b, c धन और असमान हों, तो दिखाओ कि*

$$\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}<\frac{1}{2}(a+b+c).$$

अनुच्छेद 4·3 से

$$b^2+c^2>2bc,$$

अथवा, $(b+c)^2>4bc,$

अर्थात्, $\frac{bc}{b+c}<\frac{1}{4}(b+c).$ (1)

इसी भाँति $\frac{ca}{c+a}<\frac{1}{4}(c+a),$ (2)

और $\frac{ab}{a+b}<\frac{1}{4}(a+b).$ (3)

अतः (1), (2) और (3) को जोड़ने पर प्राप्त होता है

$$\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}<\frac{1}{2}(a+b+c).$$

(iii) *यदि $x>1$ और n एक धन पूर्ण संख्या हो, तो सिद्ध करो कि*

$$\frac{x^n-1}{x-1}>nx^{(n-1)/2}.$$

क्योंकि

$$\frac{1+x+x^2+\ldots x^{n-1}}{n} > (1.x.x^2\ldots x^{n-1})^{\frac{1}{n}},$$

अतएव

$$\frac{x^n-1}{x-1} > nx^{(n-1)/2}.$$

(iv) *व्यंजक $x^2-10x+27$ का लघुतम और $16x-13-4x^2$ का महत्तम मान ज्ञात करो।*

व्यंजक $x^2-10x+27=(x-5)^2+2.$

अतएव यह लघुतम होगा जब कि $x=5$ और इसका लघुतम मान 2 होगा।

इसी भाँति $16x-13-4x^2=3-(2x-4)^2$, जो कि महत्तम होगा जब कि ऋण भाग शून्य है, अर्थात, जब $x=2$; और इसका महत्तम मान 3 है।

(v) *व्यंजक $x^2\,y^3$ का महत्तम मान ज्ञात करो जब कि $3x+2y=1$।*

[आगरा, 1957]

व्यजक $x^2\,y^3$ महत्तम है जब कि $(\frac{3}{2}x)^2\ (\frac{2}{3}y)^3$ महत्तम है। परंतु इस गुणनफल में गुणनखंडों का योगफल

$$=2.\tfrac{3}{2}x+3.\tfrac{2}{3}y,$$

$$=3x+2y=1,$$

जो कि अचर है।

अतः §4. 31 से, $(3x/2)^2\ (2y/3)^3$ महत्तम है जब कि इसके गुणनखंड समान हैं, अर्थात, जब कि

$$\frac{3x}{2}=\frac{2y}{3}=\frac{3x+2y}{3+2}=\frac{1}{5}.$$

अतएव $x^2\ y^3$ का महत्तम मान

$$=\left(\frac{2}{15}\right)^2\left(\frac{3}{10}\right)^3=\frac{3}{6250}.$$

(vi) दिखाओ कि

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z} > x^x y^y z^z .$$

जब कि $x = y = z$ नहीं हैं। [इलाहाबाद, 1948]

कल्पना करो कि x, y, z असमान धन पूर्ण संख्या हैं। अब यदि x गुणनखंड लें जिसमें से प्रत्येक x के बराबर हो, y गुणनखंड लें जिसमें से प्रत्येक y के बराबर हो और z गुणनखंड लें जिसमें प्रत्येक z के बराबर हो, तो § 5.32 से

$$\frac{x.x + y.y + z.z}{x + y + z} > (x^x y^y z^z)^{\frac{1}{x+y+z}} ,$$

अर्थात्, $\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z} > x^x y^y z^z.$

यदि x, y, z भिन्नात्मक हैं, तो कल्पना करो कि यह क्रमशः $a/d, b/d, c/d$ हैं, जिसमें a, b, c, d धन पूर्ण संख्या हैं। अब हमको सिद्ध करना है कि

$$\left\{\frac{(a/d)^2+(b/d)^2+(c/d)^2}{(a/d)+(b/d)+(c/d)}\right\}^{(a+b+c)/d} > \left(\frac{a}{d}\right)^{a/d}\left(\frac{b}{d}\right)^{b/d}\left(\frac{c}{d}\right)^{c/d} ,$$

अथवा $\left\{\frac{a^2+b^2+c^2}{d(a+b+c)}\right\}^{a+b+c} > \left(\frac{a}{d}\right)^a \left(\frac{b}{d}\right)^b \left(\frac{c}{d}\right)^c ,$

अर्थात, $\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c} > a^a b^b c^c ,$

जो कि सिद्ध किया जा चुका है।

अतः साध्य प्रमाणित हो जाता है।

प्रश्नावली

सिद्ध करो:

1. $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 > abc\,(a + b + c).$ [पंजाब, 1949]
2. $6abc < bc\,(b + c) + ca\,(c + a) + ab\,(a + b).$
3. $cd\,(a + b)^2 < (ad + bc)\,(ac + bd).$

4. $(a+b+c)(bc+ca+ab) > 9abc$.

[कलकत्ता आ०, 1955]

5. $(a/e+b/f+c/g)(e/a+f/b+g/c) > 9$.

6. $10x^2+5y^2+13z^2 > 2(xy+4yz+9zx)$.

[यू० पी० सी० एस०, 1968]

7. दिखाओ कि किसी धन संख्या और उसके व्युत्क्रम का योगफल 2 से कम नहीं होता है।

8. दिखाओ कि

$$a_1/a_2+a_2/a_3+a_3/a_4+\cdots+a_{n-1}/a_n+a_n/a_1 > n.$$

[उत्कल, 1947]

9. यदि $x+y+z=1$, तो दिखाओ कि

$$(1-x)(1-y)(1-z) > 8xyz.$$ [विक्रम, 1959]

10. यदि $l^2+m^2+n^2=1$ और $l'^2+m'^2+n'^2=1$, तो दिखाओ कि

$$ll'+mm'+nn' < 1.$$ [आगरा, 1961]

11. दिखाओ कि

$$a^2+b^2+c^2 > bc+ca+ab.$$

अतएव निगमन करो कि

$$a^3+b^3+c^3 > 3abc.$$ [नागपुर, 1934]

सिद्ध करो :

12. $n^n > 1.3.5.\ldots(2n-1)$. [आगरा, 1955]

13. $2.4.6.\ldots 2n < (n+1)^n$. [कश्मीर, 1954]

14. यदि n एक धन पूर्ण संख्या है, तो दिखाओ कि

$$2^n > 1+n\sqrt{2^{n-1}}.$$ [गोरखपुर, 1962]

15. यदि x, y, z परिमेय तथा $x>y>z>0$, तो दिखाओ कि

$$x^{y-z}\, y^{z-x}\, z^{x-y} < 1.$$ [आई० सी० एस०, 1943]

16. सिद्ध करो कि

$$\left\{\frac{n+1}{2}\right\}^{n(n+1)/2} < 2^2.3^3.4^4.\ldots\ldots n^n.$$ [मद्रास, 1938]

17. व्यंजक $(8-x)^3\ (x+6)^4$ का महत्तम मान ज्ञात करो जब कि x का मान -6 और 8 के मध्य है। [अनामलाई, 1950]

18. यदि $2x+5y=3$, तो x^3y^4 का महत्तम मान ज्ञात करो।

19. व्यजक $3x+4y$ का लघुत्तम मान ज्ञात करो, जब कि $x^2y^3=6$ ।

[कलकत्ता आ०, 1950]

20. $(x+a)\ (x+b)/(x-c)$ का लघुत्तम मान ज्ञात करो ।

4·4. m **वें घातांक का समांतर माध्य : *यदि*** a ***और*** b ***कोई दो धन, असमान संख्याएं तथा*** m ***कोई 0 और 1 से भिन्न परिमेय संख्या हो, तो,*** m ***के 0 और 1 के मध्य होने व न होने के अनुसार ,***

$$\frac{a^m+b^m}{2} \gtrless \left(\frac{a+b}{2}\right)^m.$$

यहाँ

$$a^m = \left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)^m,$$

$$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^m \left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)^m,$$

$$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^m \left\{1+m\left(\frac{a-b}{a+b}\right)+\frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3+\ldots\ldots\ldots\right\},$$

द्विपद—प्रमेय से विस्तार करने पर।

यह विस्तार तर्क संगत है, क्योंकि $a-b > a+b$ ।

इसी भाँति

$$b^m = \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right)^m,$$

$$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^m \left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right)^m,$$

$$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^m \left\{1 - m\left(\frac{a-b}{a+b}\right) + \frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3 + \ldots\ldots\right\}.$$

अतएव

$$\frac{a^m + b^m}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^m + \frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{m-2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{m-4}\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 + \ldots\ldots\ldots.$$

अव निम्नलिखित तीन स्थितियाँ प्रत्यक्ष हैं:—

स्थिति 1 : यदि $m < 0$, अर्थात्, जब m ऋण है, तो दक्षिण पक्ष व्यंजक के सब पद धन हैं। अतएव

$$\frac{a^m + b^m}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^m.$$

स्थिति 2 : यदि m का मान 0 और 1 के मध्य है, तो दक्षिण पक्ष में प्रथम के अतिरिक्त शेष पद ऋण हैं। अतएव

$$\frac{a^m + b^m}{2} < \left(\frac{a+b}{2}\right)^m.$$

स्थिति 3 : यदि $m > 1$, तो कल्पना करो कि $m = 1/n$ और $n < 1$। तब यदि A और B कोई दो धन संख्याएं हों, तो (ii) से प्राप्त होता है

$$\left(\frac{A+B}{2}\right)^n > \frac{A^n+B^n}{2},$$

अथवा
$$\frac{A+B}{2} > \left(\frac{A^n+B^n}{2}\right)^{1/n},$$

अब $A=a^m, B=b^m$ प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$\frac{a^m+b^m}{2} > \left(\frac{a^{mn}+b^{mn}}{2}\right)^{1/n},$$

अर्थात्,
$$\frac{a^m+b^m}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^m.$$

अतः प्रमेय प्रमाणित हो जाता है।

टिप्पणी : जब $m = 0$ अथवा 1, तो असमता समता में रूपांतरित हो जाती है।

4·41. m वें घातांक के समांतर मध्यमान की व्यापक स्थिति : यदि $a_1, a_2, \ldots a_n$, n धन संख्यायें हों, जो कि सब एक दूसरे के समान नहीं हैं, तथा m कोई 0 और 1 से भिन्न परिमेय संख्या हो, तो, m के 0 और 1 के मध्य होने व न होने के अनुसार

$$\frac{a_1^m+a_2^m+\ldots+a_n^m}{n} \gtrless \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^m.$$

सर्व प्रथम कल्पना करो कि m का मान 0 और 1 के मध्य नहीं है; तो § 4·3 के प्रमेय 2 की भाँति दो स्थितियाँ उत्पन्न होती हैं।

स्थिति 1 : जब $n = 2^k$ और k पूर्ण संख्या है, तो § 4.4 के प्रमेय से

$$\frac{a_1^m+a_2^m}{2} > \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^m$$

और
$$\frac{a_3^m+a_4^m}{2} > \left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^m;$$

अतः $$\frac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + a_4^m}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{a_1^m + a_2^m}{2} + \frac{a_3^m + a_4^m}{2}\right\},$$

$$> \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^m + \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^m\right\},$$

$$> \left\{\frac{(a_1 + a_2)/2 + (a_3 + a_4)/2}{2}\right\}^m,$$

$$= \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^m.$$

अतएव प्रमेय $k = 2$ के लिए सत्य है।

उपरोक्त विधि की $k - 2$ वार पुनरावृत्ति कर दिखाया जा सकता है कि

$$\frac{a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m}{n} > \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^m,$$

जब कि $n = 2^k$ ।

अतः प्रमेय k के समस्त पूर्ण सांख्यिक मान के लिए सत्य है।

स्थिति 2 : जब $n \neq 2^k$ और k पूर्वगत स्थिति की भाँति पूर्ण संख्या है, तो इस प्रकार की एक पूर्ण संख्या r लो कि $n + r = 2^k$, और तत्पश्चात संख्याओं

$$a_1^m, a_2^m, a_3^m, \dots, a_n^m, A^m, A^m, \dots, A^m,$$

पर विचार करो। इनमें A सदैव की भाँति $a_1, a_2, \dots, a_n$ का समांतर माध्य है और A^m की r वार पुनरावृत्ति की गई है।

स्थिति 1 के फल के अनुप्रयोग से प्राप्त होता है

$$\frac{a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m + rA^m}{n + r}$$

$$> \left\{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + rA}{n + r}\right\}^m,$$

$$= A^m.$$

अतः $\frac{a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m}{n+r} > \frac{n}{n+r}A^m$

अर्थात, $\frac{a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m}{n} > \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^m.$

उपरोक्त विधि से यह भी दिखला सकते हैं कि जब m का मान 0 और 1 के मध्य होता है, तो

$$\frac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + \dots + a_n^m}{n} < \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}\right)^m.$$

4·42. महत्वपूर्ण निष्कर्ष : कल्पना करो कि $x, y, z, \dots, w$, n धन चर, c एक अचर और m कोई 0 तथा 1 से भिन्न परिमेय संख्या है; तो 4.41 के प्रमेय से निम्नलिखित दो महत्वपूर्ण निष्कर्ष का निगमन किया जा सकता है :

(i) यदि $x + y + z + \dots + w = c$, तो, m के 0 और 1 के मध्य होने व न होने के अनुसार, $x^m + y^m + \dots + w^n$ का मान लघुतम अथवा महत्तम है जब कि

$$x = y = z = \dots = w = c/n ,$$

और यह मान $n(c/n)^m$ है।

(ii) यदि $x^m + y^m + z^m + \dots + w^m = c$, तो, m के 0 और 1 के मध्य होने व न होने के अनुसार, $x + y + z + \dots + w$. का मान महत्तम अथवा लघुतम होगा जब कि

$$x = y = z = \dots = w = (c/n)^{1/m} ,$$

और यह मान $n(c/n)^{1/m}$ है।

4·43. पुनरावृत्त गुणनखंड : यदि $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, n धन राशियां हों जो कि सब एक दूसरे के समान नहीं हैं; $k_1, k_2, \dots, k_n$, n धन परिमेय संख्या; और m कोई 0 तथा 1 से भिन्न परिमेय संख्या है, तो m के 0 और 1 के मध्य न होने व होने के अनुसार

$$\frac{k_1 a_1^m + k_2 a_2^m + k_3 a_3^m + \ldots + k_n a_n^m}{k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n}$$

$$\leqslant \left(\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + \ldots + k_n a_n}{k_1 + k_2 + k_3 \ldots + k_n} \right)^m .$$

यह प्रमेय § 4·4 की भाँति सिद्ध किया जा सकता है।

4·44. उदाहरण : (i) यदि $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a$, तो दिखाओ कि

$$n\,a > (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 > a .$$

[इलाहाबाद. 1949]

अनुच्छेद 4·41 से

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} > \left\{ \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \right\}^2 ,$$

अथवा $n\,(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) > (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2$,

अथवा $$n\,a > (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 .$$

पुन:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 > x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a.$$

अत:

$$n\,a > (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 > a .$$

(ii) यदि $x + y + z = 1$, दिखाओ कि $1/x + 1/y + 1/z$ का लघुत्तम मान 9 है।

[विक्रम, 1959]

अनुच्छेद 4·41 से

$$\frac{x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}}{3} > \left(\frac{x + y + z}{3} \right)^{-1}$$

अथवा $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 9 , \text{ क्योंकि } x + y + z = 1 ।$$

जब $x = y = z$, तो असमता समता में रूपांतरित हो जाती है।

अतः $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ का लघुतम मान 9 है ।

प्रश्नावली

सिद्ध करो :

1. $8(x^2+y^2)(x^3+y^3) > (x+y)^5$.

2. $16(a^3+b^3+c^3+d^3) > (a+b+c+d)^3$.

3. $n(n+1)^3 < 8(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)$.

[वाराणसी, 1950]

4. $$\frac{3}{b+c+d}+\frac{3}{c+d+a}+\frac{3}{d+a+b}+\frac{3}{a+b+c} > \frac{16}{a+b+c+d}.$$

[आई० सी० एस०, 1938]

5. यदि a, b, c हरात्मक श्रेणी में हैं और $n > 1$, तो दिखाओ कि

$$a^n+c^n=2b^n.$$

[लखनऊ, 1958]

6. यदि a, b, c असमान हैं, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a} > \frac{9}{a+b+c}$$

[राजस्थान, 1958]

7. यदि a, b, c वास्तविक संख्या हैं, तो दिखाओ कि

$$(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2 \geqslant bc+ca+ab.$$

8. यदि n धन असमान संख्या $a_1, a_2, \ldots, a_n$ के योगफल को s से सूचित किया जाये तथा $(s-a_1), (s-a_2) \ldots (s-a_n)$ धन हों, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\cdots+\frac{s}{s-a_n}>\frac{n^2}{n-1}.$$

[जबलपुर, 1962]

सिद्ध करो कि

9. $$\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}+\frac{a^2+b^2}{a+b}\geqslant a+b+c.$$

[लखनऊ, 1955]

10. $$\frac{b^4+c^4}{b+c}+\frac{c^4+a^4}{c+a}+\frac{a^4+b^4}{a+b}\geqslant 3abc.$$

[आन्ध्र, 1960]

11. यदि a, b, c असमान धन पूर्ण राशि हैं, तो दिखाओ कि

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c}>a^a b^b c^c>\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}.$$

[विहार, 1962]

4·5. विविध विधियाँ : अब हम उदाहरण द्वारा कुछ विधियों की व्याख्या करेंगे जिनका उपयोग पूर्वगत अनुच्छेदों में नहीं किया गया है।

4·51. उदाहरण : (i) *यदि a, b, c परिमाण के अनुसार अवरोही क्रम में हैं, तो दिखाओ कि*

$$\left(\frac{a+c}{a-c}\right)^a<\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^b.$$

[राजस्थान, 1959]

हमको सिद्ध करना है कि

$$\left(\frac{a+c}{a-c}\right)^a<\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^b$$

अथवा $$a \text{ लघु}_e \left(\frac{a+c}{a-c} \right) < b \text{ लघु}_e \left(\frac{b+c}{b-c} \right). \quad (1)$$

परंतु (1) का वाम पक्षीय व्यंजक

$$= a \text{ लघु}_e \left(\frac{a+c}{a-c} \right),$$

$$= a \text{ लघु}_e \frac{1+c/a}{1-c/a},$$

$$= 2a \left(c/a + c^3/(3a^3) + c^5/(5a^5) + \dots \right),$$

$$= 2c \left(1 + \frac{c^2}{3a^2} + \frac{c^4}{5a^4} + \dots \right). \quad (2)$$

इसी प्रकार, (1) का दक्षिण पक्ष व्यंजक

$$= 2c \left(1 + \frac{c^2}{3b^2} \pm \frac{c^4}{5b^4} + \dots \right). \quad (3)$$

परंतु $a > b > c$ और इस कारण $c/a < c/b$ । अतः (2) का प्रत्येक पद (3) के संगत पद से कम है।

अतएव सम्बंध (1) सत्य है। अतः साध्य प्रमाणित हो जाता है।

(iii) *सिद्ध करो कि*

$$(1+x)^{1-x} (1-x)^{1+x} < 1, \text{ जब कि } x < 1,$$

और अतएव निगमन करो कि

$$a^b b^a < \{ \tfrac{1}{2} (a+b) \}^{a+b}.$$

[नागपुर, 1954]

कल्पना करो कि $P = (1+x)^{1-x} (1-x)^{1+x}$; तो

$$\text{लघु}_e P = (1-x) \text{ लघु}_e (1+x) + (1+x) \text{ लघु}_e (1-x),$$

$$= \{ \text{लघु}_e (1+x) + \text{लघु}_e (1-x) \}$$
$$- x \{ \text{लघु}_e (1+x) - \text{लघु}_e (1-x) \},$$

$$= -2 \{ \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{4} x^4 + \tfrac{1}{6} x^6 + \dots \}$$
$$- 2x \{ x + \tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{1}{5} x^5 + \dots \},$$

जो कि ऋण है। अतः

$$P = (1+x)^{1-x}\,(1-x)^{1+x} < 1.$$

इसमें $x = (a-b)/(a+b)$ प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$\left(\frac{2a}{a+b}\right)^{2b/(a+b)} \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{2a/(a+b)} < 1,$$

अथवा $$\left(\frac{2a}{a+b}\right)^{b} \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{a} < 1,$$

अर्थात्, $$a^b\, b^a < \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}.$$

(iii) यदि a, b और x धन हैं और $a > b$, तो

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a} > \left(1+\frac{x}{b}\right)^{b}.$$

अतएव दिखाओ कि $(1+1/n)^n$ का मान 2 और 2·718 के मध्य है, जब कि $n > 1$।

कल्पना करो कि a ओर b पूर्ण संख्या हैं; तो द्विपद विस्तार से

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a} = 1 + a \cdot \frac{x}{a} + \frac{a(a-1)}{2!}\,\frac{x^2}{a^2} + \frac{a(a-1)\,(a-2)}{3!}\,\frac{x^3}{a^3} + \cdots,$$

$$= 1 + x + \left(1-\frac{1}{a}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{2}{a}\right)\frac{x^3}{3!} \cdots \quad . \quad (1)$$

और इसी भाँति

$$\left(1+\frac{x}{b}\right)^{b} = 1 + x + \left(1-\frac{1}{b}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{2}{b}\right)\frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots \quad (2)$$

क्योंकि $a > b$, (1) के विस्तार में पद-संख्या (2) के विस्तार की पद संख्या से अधिक है। पुनः (1) का प्रत्येक पद (2) के संगत पद से बड़ा है। अतः

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^a > \left(1+\frac{x}{b}\right)^b.$$

यदि a और b भिन्न हैं, तो हम लिख सकते हैं

$$a = p/d \text{ और } b = q/d,$$

जिसमें कि p, q और d धन पूर्ण संख्या हैं। अब हमको सिद्ध करना है कि

$$\left(1+\frac{xd}{p}\right)^{p/d} > \left(1+\frac{xd}{q}\right)^{q/d},$$

अथवा $$\left(1+\frac{xd}{p}\right)^p > \left(1+\frac{xd}{q}\right)^q.$$

यह (1) से सत्य है क्योंकि $p > q$।

अतः

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^a > \left(1+\frac{x}{b}\right)^b,$$

जब कि a, b और x धन हैं और $a > b$।

इसमें $x=1$, $a=n$ और $b=1$ प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2.$$

पुनः $x=1$, $b=n$ रखकर और a को अनंत की ओर प्रवृत करने पर प्राप्त होता है

$$\text{सीमा}_{a\to\infty} (1+1/a)^a > (1+1/n)^n,$$

अथवा $$2.718 \ldots > (1+1/n)^n,$$

क्योंकि $$\text{सीमा}_{a\to\infty} (1+1/a)^a = e = 2.718 \ldots\ldots .$$

अतएव $(1+1/n)^n$ का मान 2 और 2.718 के मध्य है।

(vi) *यदि 1 से कम n धन संख्याओं $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ के योगफल को s_n (<1) से सूचित किया जाये, तो दिखाओ कि*

$$1-s_n<(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\ ,\ldots(1-a_n)<\frac{1}{1+s_n},$$

$$1+s_n<(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ \ldots\ (1+a_n)<\frac{1}{1-s_n}.$$

[लखनऊ, 1954]

यहाँ

$$(1-a_1)(1-a_2)=1-(a_1+a_2)+a_1a_2$$
$$>1-(a_1+a_2)\ ;$$
$$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)>\{1-(a_1+a_2)\}(1-a_3),$$
$$>1-(a_1+a_2+a_3),\ (1)\text{ से };$$
$$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)>\{1-(a_1+a_2+a_3)\}(1-a_4)$$
$$>1-(a_1+a_2+a_3+a_4),\ (1)\text{ से};$$

इसी प्रकार की कृति से, जब तक कि वामपक्ष में n गुणनखंड हो जायें, प्राप्त होता है

$$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\ \ldots\ (1-a_n)$$
$$>1-(a_1+a_2+a_3\ \cdots+a_n),$$
$$=1-s_n.$$

इसी भाँति यह दिखाया जा सकता है कि

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ \ldots\ (1+a_n)>1+s_n.$$

पुनः, क्योंकि $(1-a_m^2)<1$,

$$(1-a_m)<\frac{1}{1+a_m}.$$

इसमें $m=1, 2, 3, \ldots, n$ रखने पर प्राप्त होता है

$$1-a_1<\frac{1}{1+a_1},$$

$$1-a_2<\frac{1}{1+a_2},$$

$$1-a_3 < \frac{1}{1+a_3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$1-a_n < \frac{1}{1+a_n}.$$

अतः गुणा करने पर,

$$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3) \ldots (1-a_n)$$

$$< \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) \ldots (1+a_n)},$$

$$< \frac{1}{1+s_n}, \text{ (3) से।} \quad (4)$$

इसी भाँति यह दिखाया जा सकता है कि

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) \ldots (1+a_n)$$

$$< \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) \ldots (1+an)},$$

$$< \frac{1}{1-s_n}, \quad \text{(2) से।} \quad (5)$$

परिणाम (2) और (4), तथा (3) और (5) को संयुक्त करने पर वांछित परिणाम प्राप्त हो जाते हैं।

इस उदाहरण की असमताएं 'वायस्ट्रास-असमताएं' कहलाती हैं।

विविध प्रश्नावली

1. दिखाओ कि $(1+x^3)(1+y^3)(1+z^3) > (1+xyz)^3$.

[इलाहाबाद, 1943]

2. दिखाओ कि

$$(x^m+y^m)^n < (x^n+y^n)^m,$$

जब कि $m > n$। [लखनऊ, 1952]

3. यदि किसी त्रिभुज की भुजाओं को a, b, c से सूचित किया जाये, तो दिखाओ कि

( ) $a^3(p-q)(p-r)+b^2(q-r)(q-p)+c^2(r-p)(r-q) \geqslant 0$, जब कि p, q, r वास्तविक संख्या हैं।

(ii) $a^2yz + b^2zx + c^2xy$ धन नहीं हो सकता यदि $x+y+z=0$.

4. $(n!)^2 < r!(2n-r)!$.

5. $1!\,3!\,5!\,\ldots\,(2n-1)! > (n!)^n$

[लखनऊ, 1962]

6. यदि चार असमान धन संख्याओं a, b, c, d का योगफल s है. तो दिखाओ कि

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) > 81abcd.$$

[राजस्थान, 1949]

7. यदि x, y, z धन और असमान हैं तो दिखाओ कि

(i) $(x+y+z) > 27\,(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$.

[सागर, 1955]

(ii) $xyz > (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$.

[नागपुर, 1955]

8. दिखाओ कि

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdot \ldots \cdot \frac{4n-1}{4n+1} < \left\{3/(4n+3)\right\}^{1/2}.$$

[राजस्थान, 1950]

9. सिद्ध करो कि

$$(1^r + 2^r + 3^r + \ldots + n^r)^n > n^n\,(n!)^r$$

[पंजाब, 1951]

10. $(7-x)^4\,(2+x)^5$ का महत्तम मान ज्ञात करो जब कि x का मान 7 और -2 के मध्य है।

[कशमीर, 1953]

11. यदि x का मान -5 और 7 के मध्य है. तो

$$(7-x)^3\,(x+5)^4$$

का महत्तम मान ज्ञात करो। [त्रावणकोर, 1942]

12. व्यंजक

$$(2-x)\ (3-y)\ (4x+5y)$$

का महत्तम मान ज्ञात करो, जब कि $0<x<2$ और $0<y<3$ ।

[आन्ध्र. 1942]

13. यदि $a^2x^4 + b^2y^4 = c^6$, तो दिखाओ कि xy का महत्तम मान

$$c^3/\sqrt{(2\,ab)}$$

है।

[अनामलाई, 1946]

14. व्यंजक $x^2y^3z^4$ का महत्तम मान ज्ञात करो जब कि $x+y+z=18$ ।

[आगरा, 1942]

15. यदि x, y, z कोई तीन धन राशियाँ हैं, तो दिखाओ कि

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant 9.$$

[लखनऊ, 1958]

16. दिखाओ कि

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}.$$

[आगरा, 1952]

17. यदि $a_1, a_2, \ldots, a_n$ धन परिमेय संख्यायें हैं, जो कि सब एक दूसरे के बराबर नहीं हैं, तो दिखाओ कि

$$\left(\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\right)^{a_1+a_2+\ldots+a_n}$$

$$> a_1^{a_1}\, a_2^{a_2}\, a_3^{a_3}\, a_4^{a_4} \ldots a_n^{a_n},$$

$$> \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{a_1+a_2+\ldots+a_n}$$

18. $$(a+b+c+d)\,(a^3+b^3+c^3+d^3)$$

$$> (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 .$$

[आगरा, 1944]

19. $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 \quad > abcd \ (a + b + c + d)$.

[कलकत्ता आ०. 1958]

20. $a^7 + b^7 + c^7 + d^7 \quad > abcd \ (a^3 + b^3 + c^3 + d^3)$.

[त्रावणकोर, 1947]

21. यदि x और y धन उचित भिन्न हैं और $x > y$, तो सिद्ध करो कि

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x} > \left(\frac{1+y}{1-y}\right)^{1/y} .$$ [सागर, 1957]

22. यदि $x < 1$, तो दिखाओ कि

$$(1+x)^{1+x}\,(1-x)^{1-x} > 1$$

और अतएव निगमन करो कि

$$a^a b^b > \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b} .$$

[राजस्थान, 1961]

23. यदि a और b कोई दो धन परिमेय संख्यायें हैं, तो दिखाओ कि

$$a^a b^b > \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b} > a^b b^a .$$ [लखनऊ, 1956]

24. दिखाओ कि

$$\frac{1}{2\sqrt{(n+1)}} < \frac{1.3.5.\ldots(2n-1)}{2.4.6.\ldots\ldots.2n} < \frac{1}{\sqrt{(2n+1)}} .$$

[लखनऊ, 1957]

25. यदि $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ इस प्रकार की धन संख्यायें हों कि

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant 1,$$

तो सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant n^2 .$$ [लखनऊ, 1953]

26. यदि n एक धन पूर्ण संख्या है, तो सिद्ध करो कि

$$(n+1)^n > 2^n . n! .$$ [लखनऊ, 1949]

27. यदि $a > b > 0$ और n एक धन पूर्ण संख्या है, तो सिद्ध करो कि

$$a^n - b^n > n(a-b)\ (ab)^{(n-1)/2}.$$ [आगरा, 1950]

28. यदि $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ और $n > 2$, तो दिखाओ कि

$$n(n+1)^{1/n} - n < s_n < n - (n-1)n^{-1/(n-1)}.$$

[उत्कल ,1947]

29. यदि $a, b, c, d, \dots, p$ धन पूर्ण संख्यायें हैं, जिनका योगफल n है, तो दिखाओ कि

$$a!\, b!\, c!\, d! \dots p!$$

का लघुतम मान

$$\{ q! \}^{p-r} \{ (q+1)! \}^r.$$

है, जिसमें q भागफल और r शेष है, जब कि n को p से भाग करते हैं।

[आगरा 1936]

30. यदि $a_1, a_2, \dots, a_n$ राशियों की m^{th} घातांकों का योगफल S है और P उन गुणनफलों का योगफल है जो कि इन n राशियों में से m राशियाँ एक बार लेने पर प्राप्त होते हैं, तो दिखाओ कि

$$(n-1)!\, S > (n-m)!\, m!\, P.$$ [लखनऊ पू०, 1949]

अध्याय 5

सीमायें और उनका मान

5.1. इस अध्याय में हम फलन की सीमा और उनके मान निकालने की विधियों की समीक्षा करेंगे।

कल्पना करो कि x चर और m अचर परिमित राशि है; तो x में पर्याप्त वृद्धि कर m/x^2 का मान इच्छानुसार कम कर सकते हैं, अर्थात् x में पर्याप्त वृद्धि कर m/x^2 का मान इच्छानुसार शून्य के सन्निकट कर सकते हैं। इसको सामान्यतः यह कह कर अभिव्यक्त करते हैं कि 'm/x^2 की सीमा शून्य है जब कि x अनन्त की ओर प्रवृत्त होता है' तथा इस कथन को

$$\underset{x \to \infty}{\text{सीमा}} \frac{m}{x^2} = 0$$

से निरूपित करते हैं।

पुनः x के घटने से भिन्न m/x^2 बढ़ती है, और x में पर्याप्त घटती कर m/x^2 का मान इच्छानुसार बढ़ाया जा सकता है; इस प्रकार जब x शून्य है, m/x^2 की कोई परिमित सीमा नहीं है। इसको सामान्यतः यह कह कर अभिव्यक्त करते हैं कि 'm/x^2 की सीमा अनन्त है जब कि x शून्य की ओर प्रवृत्त होता है' तथा इस कथन को

$$\underset{x \to 0}{\text{सीमा}} \frac{m}{x^2} = \infty$$

से निरूपित करते हैं।

5.2. सीमा की परिभाषा : विद्यार्थी को सीमा का अर्थ समझने में, जहाँ पर भी वह अब तक प्रयोग किया है, कोई कठनाई नहीं हुई होगी। परंतु उच्च गणित में 'सीमा' शब्द के परिशुद्ध अर्थ का ज्ञान आवश्यक है। इस कारण अब हम 'सीमा' की परिभाषा परिशुद्ध गणितीय भाषा में देंगे।

(1) फलन $f(x)$ की सीमा, जब कि $x \to a$, l है, यदि, किसी भी, कितनी ही लघु धन संख्या ϵ के दिए होने पर, हम इस प्रकार की एक (ϵ पर निर्भर) धन संख्या η ज्ञात कर सकें कि असमता

$$0 < |x-a| < \eta$$

को संतुष्ट करने वाले x के समस्त मान के लिए

$$|f(x)-l| < \epsilon .$$

इस कथन को

$$\underset{x \to a}{\text{सीमा}} f(x) = l$$

से निरूपित करते हैं।

(2) फलन $f(x)$ की सीमा, जब कि $x \to a$, ∞ है, यदि, किसी भी कितनी ही वृहत संख्या N के दिए होने पर, हम इस प्रकार की एक (N पर निर्भर) धन संख्या η ज्ञात कर सकें कि असमता

$$0 < |x-a| < \eta$$

को संतुष्ट करने वाले x के समस्त मान के लिए

$$f(x) > N .$$

इस कथन को

$$\underset{x \to a}{\text{सीमा}} f(x) = \infty$$

से निरूपित करते हैं।

(3) फलन $f(x)$ की सीमा, जब कि $x \to \infty$, l है, यदि, किसी भी कितनी ही लघु धन संख्या ϵ के दिए होने पर हम इस प्रकार की एक (ϵ पर निर्भर) धन संख्या N ज्ञात कर सकें कि असमता

$$x > N$$

को संतुष्ट करने वाले x के समस्त मान के लिए

$$|f(x)-l| < \epsilon.$$

इस कथन को

$$\underset{x \to \infty}{\text{सीमा}} f(x) = l$$

से निरूपित करते हैं।

5.21. महत्वपूर्ण निगमन : इस अनुच्छेद में हम श्रेणी के अभिसरण में उपयोगी दो महत्वपूर्ण निगमन की समीक्षा करेंगे।

पूर्वंगत अनुच्छेद की परिभाषा (3) का अर्थ है कि यदि

$$\underset{x \to \infty}{\text{सीमा}} f(x) = l,$$

तो $\in$ के दिए होने पर, हम इस प्रकार का N ज्ञात कर सकते हैं कि असमता $\eta > N$ को संतुष्ट करने वाले η के समस्त मान के लिए

$$l - \in \ < f(x) < l + \in.$$

इससे निम्नलिखित निगमन किया जा सकता है:
कल्पना करो कि

$$\underset{x \to \infty}{\text{सीमा}} f(x) = l,$$

तो

(i) यदि $l < 1$ तो $\in$ और N इस प्रकार से चुने जा सकते हैं कि असमता

$$x > N$$

को संतुष्ट करने वाले x के समस्त मान के लिए

$$f(x) < l + \in \ < 1;$$

(ii) यदि $l > 1$, $\in$ और N इस प्रकार चुने जा सकते हैं कि असमता $x > N$ को संतुष्ट करने वाले x के समस्त मान के लिए

$$f(x) > l - \in \ > 1.$$

5.3. सीमा पर मूल प्रमेय : अब हम सीमा पर कुछ मूल प्रमेय की विवेचना करेंगे। इनको स्वयं-तथ्य माना जा सकता है। यह अति महत्वपूर्ण हैं और इनका प्रयोग सीमा का मान निकालने में वारम्वार आता है।

कल्पना करो कि

$$\underset{x \to a}{\text{सीमा}} f(x) = A, \quad \underset{x \to b}{\text{सीमा}} \phi(x) = B$$

तथा A और B परिमित हैं; तो

(i) $\underset{x \to a}{\text{सीमा}} \left\{ f(x) \pm \phi(x) \right\} = A \pm B;$

(ii) $\underset{x \to a}{\text{सीमा}} \left\{ k\, f(x) \right\} = k A$, जिसमें k अचर है, अर्थात्, x पर निर्भर नहीं है;

(iii) $\underset{x \to a}{\text{सीमा}} \left\{ f(x) \cdot \phi(x) \right\} = A B;$

(iv) $\underset{x \to a}{\text{सीमा}} \left\{ f(x) / \phi(x) \right\} = A/B$, सिवाय जब कि $B = 0$;

(v) $\underset{x \to a}{\text{सीमा}} \phi\left\{ f(x) \right\} = \phi(A)$, शर्त यह है कि $\phi(x)$ फलन $x = A$ पर सतत है, a चाहे परिमित हो अथवा अपरिमित;

(vi) $\underset{x \to a}{\text{सीमा}} f(x) \leqslant \underset{x \to a}{\text{सीमा}} \phi(x)$, यदि $f(x) < \phi(x)$.

क्योंकि x के समस्त मान के लिए, जिन परदोनों सीमायें निर्भर हैं, $f(x) < \phi(x)$, विद्यार्थी स्वभावतः सोचने लगते हैं कि

$$\underset{x \to a}{\text{सीमा}} f(x) > \underset{x \to a}{\text{सीमा}} \phi(x);$$

परंतु कभी कभी यह भी हो सकता है कि दोनों सीमायें के मान बराबर हों। उदाहरणार्थ, यदि x धन हो, तो

$$1 < 1 + x$$

परंतु
$$\underset{x \to 0}{\text{सीमा}} 1 = \underset{x \to 0}{\text{सीमा}} (1 + x) = 1.$$

उपरोक्त प्रमेयों का, संख्या में दो से अधिक परंतु परिमित फलन के लिए भी विस्तार किया जा सकता है। जब फलन की संख्या अपरिमित होती है, उपरोक्त प्रमेय सत्य नहीं भी हो सकते हैं। उदाहरणार्थ, अपरिमित श्रेणी

$$\frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{x}{(1+x)^3} + \cdots\cdots\cdots \infty$$

के प्रत्येक पद की सीमा शून्य है जब कि $x \to 0$; परंतु इसका योगफल 1 है और अतएव योगफल की सीमा, जब $x \to 0$, भी 1 है।

उपरोक्त प्रमेयों को सिद्ध न कर उनकी सत्यता को हम मान लेंगे। इनके प्रमाण के लिए चलन-कलन की किसी पुस्तक का अध्ययन करना चाहिए।

5.4. सीमा का मान ज्ञात करना : कल्पना करो कि $\{f(x)/\phi(x)\}$ की सीमा का मान, जब कि $x \to a$ ज्ञात करना है।

यदि $x = a$ रखने पर फलन $f(x)$ अनिर्धारित नहीं हो जाता, तो $f(x)$ की सीमा को, फलन $f(x)$ में $x = a$ प्रतिस्थापित कर ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण : *ज्ञात करो*

$$\underset{x \to 2}{\text{सीमा}} \frac{(3-x)(x+5)}{(x+1)^3}.$$

क्योंकि $x = 2$ रखने पर व्यंजक अनिर्धारित नहीं हो जाता हैं, अतएव

$$\underset{x \to 2}{\text{सीमा}} \frac{(3-x)(x+5)}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{(3-2)(2+5)}{(2+1)^3},$$
$$= 7/27.$$

यदि $x = a$ रखने पर फलन $f(x)$ अनिर्धारित हो जाता है, तो हम निर्दिष्ट फलन को निर्धारित बनाने का प्रयत्न करते हैं। इसकी कुछ विधियाँ निम्नलिखित हैं :

(क) यदि $f(x)$ और $\phi(x)$ दो x के बीजीय फलन हों, जिनकी सीमायें ∞ हैं, जब $n \to \infty$, तो सर्व प्रथम हर और अंश को निम्न उदाहरण की भाँति x की उपयुक्त घातांक से भाग करते हैं और फिर सीमा $\{f_1(x)/f_2(x)\}$ ज्ञात करते हैं।

उदाहरण : *मान ज्ञात करो*

$$\underset{x \to \infty}{\text{सीमा}} \frac{(2+x)(3-x)}{4-7x^2}$$

हर और अंश को x^2 से भाग करने पर उपरोक्त सीमा

$$= \underset{x \to \infty}{\text{सीमा}} \frac{(2/x+1)(3/x-1)}{(4/x^2-7)},$$

$$= \frac{(1)(-1)}{(-7)} = \frac{1}{7}.$$

(ख) यदि निर्दिष्ट फलन दो करणी का अनुपात हो, तो सीमा अधिक सरलता से ज्ञात की जा सकती है जब कि हर और अंश को किसी उपयुक्त अपरिमेय राशि से गुणा कर करणी का परिमेयकरण सम्भव हो।

उदाहरण ; *मान ज्ञात करो*

$$\text{सीमा}_{x \to a} \frac{\sqrt{(x+3a)} - \sqrt{(4a)}}{\sqrt{(2x+a)} - \sqrt{(3a)}}.$$ [लखनऊ, 1954]

उपरोक्त भिन्न के हर और अंश को $\sqrt{(x+3a)} - \sqrt{(4a)}$ के संयुग्मी $\sqrt{(x+3a)} + \sqrt{(4a)}$ और $\sqrt{(2x+a)} - \sqrt{(3a)}$ के संयुग्मी $\sqrt{(2x+a)} + \sqrt{(3a)}$ से गुणा करने पर उपरोक्त सीमा

$$= \text{सीमा}_{x \to a} \frac{(x+3a)-(4a)}{(2x+a)-(3a)} \cdot \frac{\sqrt{(2x+a)} + \sqrt{(3a)}}{\sqrt{(x+3a)} + \sqrt{(4a)}},$$

$$= \text{सीमा}_{x \to a} \frac{x-a}{2(x-a)} \cdot \frac{\sqrt{(2x+a)} + \sqrt{(3a)}}{\sqrt{(x+3a)} + \sqrt{(4a)}},$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{(3a)}}{2\sqrt{(4a)}},$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{3}.$$

(ग) कभी कभी निर्दिष्ट फलन की सीमा ज्ञात करने से पूर्व उसको उपयुक्त प्रतिस्थापन से सरल करना लाभदायक रहता है।

उदाहरण : *सिद्ध करो कि*

$$\text{सीमा}_{n \to \infty} \frac{\text{लघु}\, n}{n} = 0.$$ [लखनऊ, 1952]

कल्पना करो कि लघु $n = t$, तो $t \to \infty$ जब कि $n \to \infty$ । अतः

$$\text{सीमा}_{n \to \infty} \frac{\text{लघु}\, n}{n} = \text{सीमा}_{t \to \infty} \frac{t}{e^t},$$

$$= \text{सीमा}_{t \to \infty} \frac{t}{1 + t + t^2/2! + t^3/3! + \ldots},$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{1/t + 1 + t/2! + t^2/3! + \ldots}$$

$= 0$.

(घ) कुछ फलन को सीमा द्विपद, घातीय अथवा लघुगणकीय श्रेणी के विस्तार के अनुप्रयोग से सरलता से ज्ञात की जा सकती हैं।

उदाहरण : *सिद्ध करो कि*

$$\text{सीमा}_{x \to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n.$$ [लखनऊ, 1957]

व्यंजक $(1 + x)^n$ को द्विपद-प्रमेय से विस्तार करने पर उपरोक्त सीमा

$$= \text{सीमा}_{x \to 0} \frac{\{1 + nx + n(n-1)(x^2/2!) + \ldots\} - 1}{x},$$

$$= \text{सीमा}_{x \to 0} \{n + n(n-1)(x/2) + \ldots\},$$

$= n$.

प्रश्नावली

निम्न-लिखित सीमा का मान ज्ञात करो :

1. $\text{सीमा}_{x \to 2} x^2$.

2. $\text{सीमा}_{x \to 0} \dfrac{(3-x)(x+5)(2-7x)}{(7x-1)(x+1)^3}$.

3. $\text{सीमा}_{n \to \infty} \dfrac{n^2+1}{(n+1)(n+2)}$.

4. $\text{सीमा}_{n \to \infty} \dfrac{n^{1/3}(n^2+1)^{1/3}}{\sqrt{(2n^2+3n+1)}}$.

5. $\text{सीमा}_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x^5-1}$. [एम० टी०, 1958]

6. $\underset{x \to 0}{\text{सीमा}} \dfrac{\sqrt{(1+2x)} - \sqrt{(1-3x)}}{x}$. [गोहाटी, 1955]

7. $\underset{x \to 1}{\text{सीमा}} \dfrac{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1+x^2)}}{\sqrt{(1-x)} - \sqrt{(1-x^2)}}$. [लखनऊ, 1948]

8. $\underset{x \to 1}{\text{सीमा}} \dfrac{\sqrt{x} - 1 + \sqrt{(x-1)}}{\sqrt{(x^2-1)}}$. [लखनऊ, 1954]

9. $\underset{x \to \infty}{\text{सीमा}} \dfrac{(\text{लघु } n)^2}{\sqrt{n}}$.

10. $\underset{n \to \infty}{\text{सीमा}}\ n^3 e^{-n}$.

11. $\underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} \left[\sqrt{\left\{n(n+1)\right\}} - n\right]$.

12. $\underset{x \to 1}{\text{सीमा}} \dfrac{1 - x + \text{लघु } x}{1 - \sqrt{(2x - x^2)}}$.

5.5. कुछ उपयोगी सीमायें : अब हम सीमाओं से संबंधित कुछ परिणाम देंगे, जिनको कंठस्थ करना विद्यार्थियों के लिये उपयोगी है।

(i) यदि n धन है, x^n की सीमा, जब कि $x \to \infty$, अनन्त है।

(ii) यदि n धन है, $1/x^n$ की सीमा, जब कि $x \to \infty$, शून्य है।

(iii) यदि $x < 1$, x^n की सीमा, जब कि $n \to \infty$, शून्य है।

(iv) यदि $x > 1$, x^n की सीमा. जब कि $n \to \infty$, अनन्त है।

(v) (लघु $n)/n$ की सीमा, जब कि $n \to \infty$, शून्य है। यह §6.4 के उदाहरण (iv) में सिद्ध किया जा चुका है।

(vi) $(1 + 1/n)^n$ की सीमा, जब कि $n \to \infty$, e है। क्योंकि

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots,$$

$$=1+1+\frac{(1-1/n)}{2!}+\frac{(1-1/n)(1-2/n)}{3!}+\ldots,$$

और अतः

$$\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ (1+1/n)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots\ldots$$

$$=e.$$

(vii) यदि x कोई नियत परिमित राशि है, तो $x^n/n!$ की सीमा, जब कि $n\to\infty$, शून्य है।

कल्पना करो कि x धन है और m एक इस प्रकार की पूर्ण राशि है कि $x<m<n$; तो x/m एक से कम होगा। अतः

$$\frac{x^m}{m!}\left(\frac{x}{m+1}\right)\left(\frac{x}{m+2}\right)\cdots\left(\frac{x}{n}\right)<\frac{x^m}{m!}\left(\frac{x}{m}\right)\left(\frac{x}{m}\right)\cdots\left(\frac{x}{m}\right),$$

अर्थात्,
$$\frac{x^n}{n!}<\frac{x^m}{m!}\left(\frac{x}{m}\right)^{n-m}.$$

$$\therefore \underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ \frac{x^n}{n!}\leqslant \underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ \frac{x^m}{m!}\left(\frac{x}{m}\right)^{n-m}.$$

क्योंकि $\frac{x}{m}<1$, $\left(\frac{x}{m}\right)^{n-m}\to 0$ जब कि $n\to\infty$;

अतएव दक्षिण पक्ष शून्य है।

$$\therefore \underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ \frac{x^n}{n!}=0,$$ क्योंकि यह ऋण नहीं हो सकती।

यदि x ऋण है, तो $x=-y$ ले सकते हैं, जब कि y धन है। तब $\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ \frac{x^n}{n!}$ का संख्यात्मक मान $\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ \frac{y^n}{n!}$ के संख्यात्मक मान के बराबर और अतएव शून्य है

विविध प्रश्नावली

मान ज्ञात करो :

1. $\underset{x\to 0}{\text{सीमा}}\ x\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$.

[इलाहाबाद, 1952]

2. $\underset{x\to 0}{\text{सीमा}}\ \frac{e^x-e^{-x}}{\text{लघु }(1+x)}$.

लखनऊ, 1953]

3. $\underset{x\to 0}{\text{सीमा}}\ \frac{e^x-1+\text{ लघु }(1-x))}{x^3}$.

[मद्रास, 1936]

4. $\underset{x\to 0}{\text{सीमा}}\ \frac{1-3e^{-x}+3e^{-2x}-e^{-3x}}{1-3e^x+3e^{2x}-e^{3x}}$.

[वाराणसी, 1951]

5. $\underset{x\to 1}{\text{सीमा}}\ \frac{\sqrt{(x+1)}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{(x+1)}-\sqrt[3]{2}}$.

[लखनऊ, 1950]

6. $\underset{x\to 0}{\text{सीमा}}\ \frac{\sqrt{(1+x)}-1-x/2}{\sqrt{(1+x^2)}-1}$.

[एम० टी०, 1958]

7. $\underset{x\to 0}{\text{सीमा}}\ \frac{\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(2+x)}-\sqrt{(2-x)}}$.

[लखनऊ, 1951]

8. $\underset{x\to 2a}{\text{सीमा}}\ \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2a}+\sqrt{(x-2a)}}{\sqrt{(x^2-4a^2)}}$.

[लखनऊ, 1951]

सिद्ध करो कि

9. $\underset{x\to 0}{\text{सीमा}}\ (1-x)^{1/x}=1/e$ [इलाहाबाद, 1954]

10. $\underset{n\to \infty}{\text{सीमा}}\ n\ [\text{लघु }(n+1)-\text{लघु }n]=1.$ [मैसूर, 1949]

11. $\lim\limits_{x \to 0} x^x = 1.$ [लखनऊ, 1945]

12. $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + 3/n^2 + 1/n^3)^{n^2} = e^3$ [त्रावणकोर, 1941]

13.. $\phi(n)/\phi(n+1)$ की सीमा ज्ञात करो जब कि n अनंत की ओर प्रवृत्त होता है और

$$\text{(i)}\ \phi(n) = \frac{n^2}{n!}; \qquad \text{(ii)}\ \phi(n) = \frac{(a+nx)^n}{n!}.$$

[लखनऊ, 1956]

14. दिखाओ कि श्रेणी

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \cdots + \frac{1}{n+r} + \cdots$$

का अस्तित्व है। [लखनऊ, 1958]

अध्याय 6

अनन्त श्रेणी का अभिसरण और अपसरण

6·1 प्रारम्भिक बीजगणित में अनन्त श्रेणियों के योगफल ज्ञात करने की कुछ विधियों का ज्ञान कराया गया है। अब इस अध्याय में हम अनन्त श्रेणियों के अभिसरण और अपसरण पर विचार करेंगे। इसका ज्ञान गणित के अध्ययन में बहुत महत्वपूर्ण एवं उपयोगी है।

6·2. अनुक्रम : किसी निश्चित नियम के अनुसार रचित संख्याओं के अनुक्रमण $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ को अनुक्रम कहते हैं। इसको सामान्यतः (u_n) से सूचित करते हैं।

इस प्रकार का नियम धन पूर्ण सांख्यिक चर n के एक फलन u_n को परिभाषित करता है। यह नियम पूर्णतया स्वेच्छ हो सकता है, और यह आवश्यक नहीं है कि हम u_n को n के पदों में बीजीय सूत्र द्वारा अभिव्यक्त कर सकें। उदाहरणार्थ, u_n, n^{th} अभाज्य संख्या अथवा $\sqrt{n}$ के पूर्ण सांख्यिक भाग को सूचित कर सकता है।

उस अनुक्रम को, जिसका प्रत्येक पद किसी अन्य पद से अनुगमनित होता है, अनन्त अनुक्रम कहते हैं।

6·21. श्रेणी : यदि u_n एक n का फलन है जिसका n के समस्त धन पूर्ण सांख्यिक के लिए निश्चित मान है तो

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \ldots + u_n + \ldots \ldots \ldots$$

के समरूप व्यंजक को, जिसमे प्रत्येक पद किसी अन्य पद से अनुगमनित होता है, अनन्त श्रेणी कहते हैं।

इस श्रेणी को $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$, अथवा Σu_n, से और इसके प्रथम n पदों के योगफल को S_n से सूचित करते हैं।

जब n अनन्त की ओर प्रवृत्त होता है, तो तीन भिन्न संभावनायें हैं; S_n किसी परिमित सीमा अथवा अनन्त की ओर प्रवृत हो सकता है अथवा इसमें से किसी की ओर प्रवृत्त न हो।

(i) यदि S_n परिमित सीमा S की ओर प्रवृत्त करता है, तो श्रेणी को अभिसारी और S को इसका योगफल कहते हैं। इस भाँति S को

$$\underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} S_n = S,$$

अथवा. संक्षिप्त रूप में.

$$\text{सीमा } S_n = S$$

से परिभाषित करते हैं। इसको

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots = S,$$

अथवा

$$\sum_{1}^{\infty} u_n = S,$$

अथवा

$$\Sigma u_n = S$$

लिखकर भी अभिव्यक्त करते हैं।

उदाहरणार्थ, श्रेणी

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

में

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n},$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}},$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\therefore \underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} S_n = 2.$$

अतः श्रेणी अभिसारी है और इसका योगफल 2 है।

(ii) यदि S_n अनन्त अथवा ऋण अनन्त की ओर प्रवृत्त होता है, तो श्रेणी को अपसारी कहते हैं।

उदाहरणार्थ, श्रेणी

$$1 + 2 + 3 \dots + n + \dots$$

में

$$S_n = \frac{1}{2} n(n+1).$$

$$\therefore \quad \text{सीमा}_{n \to \infty} S_n = \infty .$$

अतः श्रेणी अपसारी है।

(iii) यदि S_n किसी भी सीमा, परिमित अथवा अनन्त, की ओर प्रवृत्त नहीं होता, तो श्रेणी को दोलायमान कहते हैं। श्रेणी को, S_n के परिमित सीमा अथवा $+\infty$ और $-\infty$ के मध्य दोलन के अनुसार, परिमित अथवा अनन्त रूप से दोलायमान कहते हैं।

अपसारी और दोलायमान श्रेणी को प्रायः अ-अभिसारी श्रेणी कहते हैं।

उदाहरण : श्रेणी

$$3 - 1 - 2 + 3 - 1 - 2 + 3 - 1 - 2 + \ldots$$

दोलायमान है, क्योंकि, n के $3m$, $3m + 1$ अथवा $3m + 2$ के समरूप होने के अनुसार,

$$\text{सीमा } S_n = 0, \ 3 \text{ अथवा } 2.$$

टिप्पणी : किसी अपसारी श्रेणी का योगफल मौलिक रूप में एक सीमा होता है और योग की परिभाषा में वर्णित-बोध के अनुसार योगफल नहीं होता। अतः इस प्रकार की कल्पना की कोई तर्क संगति नहीं है कि किसी अनंत श्रेणी का योगफल पदों के क्रम में रूपांतरण अथवा कोष्ठकों के हटाने अथवा लगाने से अरूपांतरित रहेगा। वास्तविक में इस प्रकार के रूपांतरण से योगफल में रूपांतरण हो सकता है अथवा एक अभिसारी श्रेणी अपसारी अथवा दोलायमान श्रेणी में रूपांतरित हो सकती है। उदाहरणार्थ,

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

अभिसारी श्रेणी है और इसका योगफल शून्य है; परंन्तु

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

दोलायमान श्रेणी है।

6·21. अनंत श्रेणियों की विशेषतायें : अनंत श्रेणियों की दो महत्वपूर्ण विशेषतायें निम्नलिखित हैं :

(क) यदि कोई श्रेणी अभिसारी, अपसारी, अथवा दोलायमान है, तो वह संख्या में परिमित पदों के जोड़ने अथवा घटाने पर भी ऐसी ही रहती है।

(ख) यदि कोई श्रेणी अभिसारी, अपसारी, अथवा दोलायमान है, तो वह प्रत्येक पद को शून्य के अतिरिक्त किसी एक परिमित संख्या से गुणित किए जाने पर भी ऐसी ही रहती है।

इनकी सत्यता परिभाषा की सहायता से सरलता से सिद्ध की जा सकती है।

6·22. उदाहरण : (i) *दिखाओ कि गुणोत्तर श्रेणी*

$$1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots\ldots+x^n+\ldots,\ x>0,$$

अभिसारी है जब कि $x<1$ ***और अपसारी जब*** $x\geqslant 1$।

हमें ज्ञात है कि, जब $x\neq 1$,

$$S_n=\frac{1-x^n}{1-x}.$$

(क) यदि $x<1$, $x^n\to 0$ जब $n\to\infty$;

$$\therefore\quad \underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\,S_n=\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\,\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

अतएव श्रेणी अभिसारी है जब $x<1$.

(ख) यदि $x>1$, $x^n\to\infty$ जब $n\to\infty$;

$$\therefore\quad \underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\,S_n=\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\,\frac{x^n-1}{x-1}\to\infty.$$

अतएव श्रेणी अपसारी है जब $x>1$.

(ग) जब $x=1$, श्रेणी

$$1+1+1+\ldots$$

हो जाती है और $S_n=n$;

$$\therefore\quad \underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\,S_n=\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\,n\to\infty.$$

अतएव श्रेणी अपसारी है जब $x=1$.

(ii) *दिखाओ कि श्रेणी*

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

0 और 1 सीमा के मध्य परिमित दोलन करती है ।

यहाँ

$$S_{2n} = 0 \text{ और } S_{2n+1} = 1;$$

अतः, n के विषम व सम होने के अनुसार,

$$S_n = 0 \text{ अथवा } 1,$$

अर्थात्, S_n, परिमित सीमा 0 और 1 के मध्य, दोलन करता है। अतएव, परिभाषा के अनुसार, श्रेणी 0 और 1 सीमा के मध्य परिमित दोलन करती है ।

प्रश्नावली

प्रथम n पदों के योगफल पर विचार कर निम्नलिखित श्रेणियों का अभिसरण ज्ञात करो :

1. $1 + 2 + 3 + 4 + \dots .$

2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots .$

3. $\frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \frac{1}{(m+3)(m+4)} + \dots$

4. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$, जब $|x| < 1$.

5. $\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{2}{9} + \tan^{-1}\frac{4}{33} + \dots$

$$\dots + \tan^{-1}\frac{2^{n-1}}{1+2^{2n-1}} + \dots .$$

दिखाओ कि निम्नलिखित श्रेणीयाँ दोलन करती हैं और इनके दोलन की सीमा ज्ञात करो :

6. $1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{4} + 1 - \frac{7}{8} + \dots .$

7. $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots .$

6·3. धन पदों की श्रेणियां : अब हम उन श्रेणीयों पर विचार करेंगे जिनके समस्त पद धन हैं। इस शीर्षक में हम ऐसी श्रेणीयाँ भी सम्मिलित करेंगे जिनमें किसी विशेष पद के पश्चात समस्त पद धन हैं ।

6·31. मौलिक गुण : धन पदों की श्रेणी के कुछ मौलिक गुण निम्नलिखित हैं :

(क) कोष्टकों का लगाना एवं हटाना : कल्पना करो कि Σu_n एक धन पदों की श्रेणी है और बिना क्रम में रूपांतरण किए इसके पदों का वर्गीकरण किया गया है। यदि n^{th} वर्ग के पदों के योगफल को v_n से सूचित किया जाये, तो

(i) जब Σu_n योगफल S की ओर अभिसृत करता है, Σv_n भी ऐसा ही करता है।

(ii) जब Σv_n योगफल S की ओर अभिसृत करता है, Σu_n भी ऐसा ही करता है।

(ख) पदों के क्रम में रूपांतरण : यदि किसी धन पदों की अभिसारी श्रेणी के पदों का पुनर्विन्यास किया जाये, तो वह श्रेणी अभिसारी रहती है और उसके पदों के योगफल में रूपांतरण नहीं होता।

(ग) एक धन पदों की श्रेणी Σu_n कभी दोलायमान नहीं हो सकती, और यदि S_n किसी नियत संख्या k से सदैव कम हो, तो श्रेणी अभिसारी और उसका योगफल k से कम है।

क्योंकि S_n, n के साथ साथ बढ़ता जाएगा, और या तो परिमित सीमा अथवा धन अनंत की ओर प्रवृत्त होगा, अतएव वह दोलायमान नहीं हो सकता। अतः यदि S_n, n के समस्त मान के लिए, किसी नियत संख्या k से कम रहता है, तो यह अनंत की ओर प्रवृत्त नहीं हो सकता, और इस कारण परिमित सीमा की ओर प्रवृत्त होना चाहिए । अतः श्रेणी अभिसारी है।

(घ) यदि किसी धन पदों की अनंत श्रेणी का प्रत्येक पद एक नियत धन संख्या k से बड़ा हो, तो श्रेणी अपसारी होगी।

क्योंकि $S_n > na$, और n को पर्याप्त बना लेने पर इसको किसी भी नियत संख्या से बड़ा बनाया जा बकता है। अतः श्रेणी अपसारी है।

उपप्रमेय : एक धन पदों की श्रेणी अपसारी है यदि

$$\text{सीमा } u_n > 0 \text{ .}$$

क्योंकि, यदि सीमा $u_n = l > 0$ और k एक l से कम धन संख्या है, तो संख्या में परिमित पदों को छोड़ कर प्रत्येक पद k से बड़ा होगा। अतः श्रेणी अपसारी होगी।

अतः प्रत्येक अभिसारी श्रेणी के लिए

$$\text{सीमा } u_n = 0 .$$

इसका विलोम सत्य नहीं है। यदि सीमा $u_n = 0$, तो श्रेणी का अभिसारी होना आवश्यक नहीं। श्रेणी अभिसारी हो भी सकती है और नहीं भी। उदाहरणार्थ, श्रेणी

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

पर विचार करो :

$$\text{यहाँ } \underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} \; u_n = \underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} \; \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

$$\text{पुनः, } S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

$$< \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} ;$$

$$\therefore \underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} \; S_n = \underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} \sqrt{n} = \infty .$$

अतः श्रेणी अपसारी है, यद्यपि सीमा $u_n = 0$.

6·32. मानक श्रेणी $\Sigma\, 1/n^p$: *अनन्त श्रेणी*

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

अभिसारी है, जब कि $p > 1$, और अपसारी जब कि $p < 1$।

स्थिति 1 : कल्पना करो कि $p > 1$ और श्रेणी के पदों का बिना क्रम रूपांतरण किए निम्न प्रकार वर्गीकरण किया गया है :

$$\frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \cdots \qquad (1)$$

इस वर्गीकरण से §6·31 (क) के अनुसार श्रेणी के अभिसरण में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

प्रथम पद के पश्चात् (1) का प्रत्येक पद श्रेणी

$$\frac{1}{1^p}+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\cdots \qquad (1)$$

के संगत पद से कम है।

परंतु (2), श्रेणी

$$1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\frac{8}{8^p}+\cdots \qquad (3)$$

के समान है जो कि एक गुणोत्तर श्रेणी है और जिसका सार्व अनुपात $1/2^{p-1}$ है। यह सार्व अनुपात एक से कम है क्योंकि $p>1$; अतएव (3) और इस कारण (1) अभिसारी श्रेणी है।

स्थिति 2 : कल्पना करो कि $p=1$; तो निर्दिष्ट श्रेणी

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots \qquad (4)$$

हो जाती है। इस श्रेणी के पदों का वर्गीकरण निम्न प्रकार से किया जा सकता है:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \qquad (5)$$

प्रथम दो पदों के पश्चात् (5) का प्रत्येक पद श्रेणी

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \qquad (6)$$

अर्थात्. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$

के संगत पद से अधिक है। किन्तु (6) अपसारी श्रेणी है। अतएव (4) भी अपसारी श्रेणी है।

स्थिति 3 : कल्पना करो कि $p<1$ (p के ऋण मान इसके अन्तर्गत हैं); तो श्रेणी का प्रत्येक पद श्रेणी (5) के संगत पद से बड़ा है और इस कारण श्रेणी अपसारी है।

6·33. उदाहरण : श्रेणी

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{17}} + \cdots + \frac{2^n}{\sqrt{(4^n+1)}} + \cdots \quad \cdots$$

की अभिसरण-परीक्षा करो।

यहाँ $u_n = \dfrac{2^{n-1}}{\sqrt{(4^{n-1}+1)}} = \dfrac{1}{\sqrt{(1+4^{-n+1})}}$;

$$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(1+4^{-n+1})}} = 1 \ ;$$

क्योंकि यह सीमा 0 नहीं है, अतएव श्रेणी अपसारी है।

प्रश्नावली

दिखाओ कि निम्नलिखित श्रेणी अपसारी हैं :

1. $\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \cdots$

[आगरा, 1949]

2. $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{4}} + \cdots$

[उत्कल, 1950]

3. $\left(\frac{1}{1+1}\right)^{1/5} + \left(\frac{2}{2+1}\right)^{1/5} + \left(\frac{3}{3+1}\right)^{1/5} + \cdots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/5} + \cdots$

[लखनऊ, 1955]

अभिसरण अथवा अपसरण ज्ञात करो :

4. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(1+1/n)}$. [आगरा 1944]

5. $\sum_{1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$. [इलाहाबाद, 1951]

6·4. अभिसरण और अपसरण की परीक्षा : श्रेणी की परिभाषा से प्रत्येक श्रेणी को अभिसरण अथवा अपसरण ज्ञात करना सम्भव नहीं है, क्योंकि अधिकतर श्रेणीयो के पदों का योगफल ज्ञात नहीं किया जा सकता। ऐसी स्थिति में श्रेणीयों का अभिसरण अथवा अपसरण ज्ञात करने के लिए कुछ परीक्षाओं का प्रयोग करते हैं। अव हम इनमें से कुछ परीक्षाओं का वर्णन करेंगे।

6·5. तुलना परीक्षा : इस परीक्षा के दो विभिन्न रूप निम्नलिखित हैं :

(a) यदि Σu_n और Σv_n धन पदों की दो श्रेणियां हैं और Σv_n एक ज्ञात अभिसारी श्रेणी हो, तो Σu_n अभिसारी होगी :

जब कि, (i) n के समस्त मान के लिये $u_n \leqslant v_n$;
अथवा (ii) जब कि u_n/v_n किसी नियत धन संख्या k से कम है ;
अथवा (iii) जब कि u_n/v_n एक परिमित सीमा की ओर प्रवृत होता है।

प्रमाण : (i) यदि

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots \infty = t ,$$

तो

$$u_1 + u_2 + u_3 \ldots + u_n \leqslant v_1 + v_2 + \ldots + v_n < t ,$$

और क्योंकि t एक नियत संख्या है, §6.3. (ग) से Σu_n अभिसारी है।

(ii) n के समस्त मान के लिए, $u_n < k\, v_n$ । परंतु $\Sigma\, k\, v_n$ अभिसारी है; अतः §6.3 (ग) से Σu_n अभिसारी है।

(iii) यदि सीमा u_n/v_n परिमित है, तो एक ऐसा धन अचर k ज्ञात किया जा सकता है कि n के समस्त मान के लिए $(u_n/v_n) < k$ । अतः (ii) से अनुगमनित होता है कि Σu_n अभिसारी है।

(b) यदि Σu_n और Σv_n दो धन पदों की श्रेणियां हैं और Σv_n एक ज्ञात अपसारी श्रेणी हो, तो Σu_n अपसारी होगी :

जब कि (i) n के समस्त मान के कि $u_n \geqslant v_n$;
अथवा (ii) जब कि (u_n/v_n) किसी नियत धन सख्या k से सदैव अधिक है;
अथवा (iii) जब कि (u_n/v_n) शून्य से अधिक सीमा की ओर प्रवृत होता है।

प्रमाण : (i) कल्पना करो कि N एक धन संख्या है, चाहें कितनी ही बड़ी क्यों न हो; तब. क्योंकि Σv_n अपसारी है, एक ऐसा m ज्ञात किया जा सकता है कि

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots v_n > N, \text{ जब कि } n > m ;$$

$$\therefore \quad u_1 + u_2 + u_3 + \ldots u_n > N \quad .. \quad .. \quad n > m.$$

अतएव Σu_n अपसारी है।

(ii) यहाँ n के समस्त मान के लिए $u_n > kv_n$ । परन्तु Σv_n और अतएव Σkv_n अपसारी है; अतएव Σu_n अपसारी है।

(iii) यदि सीमा (u_n/v_n) परिमित है, तो एक ऐसा धन अचर k ज्ञात किया जा सकता है कि, n के समस्त मान के लिए, $u_n/v_n > k$ । अतएव Σu_n अपसारी है।

6.51. तुलना-परीक्षा के अनुप्रयोग : तुलना परीक्षा में दो श्रेणियां Σu_n और Σv_n की आवश्यकता होती है। जब श्रेणी Σu_n की परीक्षा की जाती है, तो Σv_n को सहायक श्रेणी कहते हैं।

तुलना-परीक्षा के अनुप्रयोग में n के समस्त मान के लिए u_n/v_n से बड़ी एक नियत संख्या की अपेक्षा सीमा (u_n/v_n) ज्ञात करना अधिक सुविधाजनक रहता है। सहायक श्रेणी Σv_n इस प्रकार चुननी चाहिए कि सीमा (u_n/v_n) अशून्य एवं परिमित हो। इसके लिए सामान्यतः v_n को u_n में n की अधिकतम घातांक (अथवा $1/n$ की न्यूनतम घातांक) के पद के बराबर ले लेते हैं। इस प्रकार प्राप्त सहायक श्रेणी प्रायः श्रेणी

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

के समरूप होती है। इस श्रेणी की अभिसरण-परीक्षा §6.32 में की जा चुकी है।

6.52. उदाहरण : (i) *श्रेणी*

$$\frac{2}{1^p} + \frac{3}{2^p} + \frac{4}{3^p} + \frac{5}{4^p} + \cdots$$

की अभिसरण-परीक्षा करो ।

[कलकत्ता प्रा०, 1958]

यहाँ
$$u_n = \frac{n+1}{n^p};$$

अतएव कल्पना करो कि

$$v_n = \frac{1}{n^{p-1}};$$

तो $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\, n^{p-1}}{n^p},$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n},$$

$$= 1 ;$$

जो कि परिमित और अशून्य है।

परन्तु Σv_n अभिसारी है, जब कि $p-1>1$, अर्थात्, $p>2$; और अपसारी है, जब कि $p-1 \leqslant 1$, अर्थात् $p \leqslant 2$.
अतः Σu_n भी अभिसारी है, जब कि $p>2$ और अपसारी है, जब कि $p \leqslant 2$.

(ii) *दिखाओ कि श्रेणी*

$$\sum_1^\infty \left\{(n^3+1)^{\frac{1}{3}} - n\right\}$$

अभिसारी है । [गोहाटी, 1962]

यहाँ

$$u_n = (n^3+1)^{1/3} - n ,$$

$$= n\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{1/3} - n ,$$

$$= n\left(1 + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{9n^6} + \dots\right) - n ,$$

$$= \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{9n^5} + \dots .$$

अतएव यदि $v_n = \frac{1}{n^2}$ लें, तो

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{9n^3} + \dots\right),$$

$$= \tfrac{1}{3} ,$$

जो कि परिमित एवं अशून्य है। परंतु श्रेणी Σv_n अभिसारी है, अतः Σu_n भी अभिसारी है।

6.6. कोशी की संघनन परीक्षा : *यदि n के समस्त धन पूर्ण सांख्यिक मान के लिए फलन $f(n)$ धन और निरंतर घटता है जब n बढ़ता है, और यदि a, एक से बड़ी, एक धन पूर्ण राशि है, तो दोनों श्रेणी $\Sigma f(n)$ और $\Sigma a^n f(a^n)$ अभिसारी हैं, अथवा अपसारी।*

प्रथम श्रेणी $\Sigma f(n)$ को निम्नलिखित प्रकार से लिखो:

$$\begin{aligned} &\{f(1) + f(2) + \dots + f(a)\} \\ &+ \{f(a+1) + f(a+2) + \dots + f(a^2)\} \\ &+ \{(a^2+1) + f(a^2+2) + \dots + f(a^3)\} \\ &+ \quad \dots \quad \dots \quad \dots; \end{aligned} \tag{1}$$

तब r वें कोष्ठक के पद निम्न हैं:

$$f(a^{r-1}+1) + f(a^{r-1}+2) + \dots \dots + f(a^r). \tag{2}$$

इनमें से प्रत्येक पद अंतिम पद $f(a^r)$ से बड़ा और $f(a^{r-1})$ से लघु है, क्योंकि परिकल्पना के अनुसार पद निरंतर घटते हैं। पुनः, पदों की संख्या $a^r - a^{r-1}$ है। अतः

$$f(a^{r-1}+1) + f(a^{r-1}+2) + \dots + f(a^r) < (1-a^{-1}) a^r f(a^r); \tag{3}$$

और

$$f(a^{r-1}+1) + f(a^{r-1}+2) + \dots + f(a^r) < (a-1) a^{r-1} f(a^{r-1}). \tag{4}$$

संबंध (3) और (4) में उत्तरोत्तर $r=1,2,3,\dots,n$ रखने एवं जोड़ने पर क्रमशः प्राप्त होता है

$$\sum_{2}^{a^n} f(r) < (1-a^{-1}) \sum_{1}^{n} a^r f(a^r), \tag{5}$$

$$\sum_{2}^{a^n} f(r) < (a-1) \sum_{1}^{n} a^{r-1} f(a^{r-1}).$$

असमता (6) से प्रमाणित होता है कि यदि $\Sigma a^r f(a^r)$ अभिसारी है, तो $\Sigma f(r)$ भी अभिसारी है; और (5) से प्रमाणित होता है कि यदि $a^r f(a^r)$ अपसारी है, तो $\Sigma f(r)$ भी अपसारी है।

साधारणतया यह असार है कि a को क्या मान दिया जाय।

6.61 उदाहरण : *दिखाओ की श्रेणी*

$$1+\frac{1}{2(\text{लघु}\,2)^p}+\frac{1}{3(\text{लघु}\,3)^p}+\frac{1}{n(\text{लघु}\,n)^p}+\cdots$$

अभिसारी है जब कि $p>1$, *और अपसारी जब कि* $p<1$.

यहां $f(n) = 1/\{n\,(\text{लघु}\,n)^p\}$,

और

$$a^n f(n) = a^n/\{a^n\;(\text{लघु}\,a^n)^p\},$$

$$= 1/(n\,\text{लघु}\,a)^p,$$

$$=(1/n^p)\;(\text{लघु}\,a)^{-p};$$

अतएव $\Sigma a^n f(a^n) = (\text{लघु} a)^p\;\Sigma(1/n^p)$,

परंतु $\Sigma(1/n^p)$ अभिसारी है जब कि $p>1$ और अपसारी जब कि $p\leqslant 1$ अतः श्रेणी $\Sigma 1/n\;(\text{लघु}\,n)^p$ भी अभिसारी है जब कि $p>1$ और अपसारी जब कि $p\leqslant 1$।

इस श्रेणी का सामान्यतः मानक श्रेणी की भाँति प्रयोग किया जाता है।

प्रश्नावली

ज्ञात करो कि निम्नलिखित श्रेणी अभिसारी है अथवा अपसारी :

1. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\quad\cdots$

2. $\sqrt{\frac{1}{2^3}}+\sqrt{\frac{2}{3^3}}+\sqrt{\frac{3}{4^3}}+\cdots\quad\cdots$ [वम्बई, 1954]

3. $\frac{14}{1^3}+\frac{24}{2^3}+\frac{34}{3^3}+\cdots\quad\cdots$ [राजस्थान, 1962]

4. $\frac{1}{1.3}+\frac{2}{3.5}+\frac{3}{5.7}+\cdots\quad\cdots$ [कलकत्ता, 1948]

5. $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}+\cdots$ [इलाहाबाद, 1950]

6. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{3^3}{4^4}+\cdots$ [गोहाटी, 1962]

उन श्रेणियों की अभिसरण-परीक्षा करो जिनके n वें पद निम्नलिखित हैं :

7. $\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$. [वाराणसी, 1953]

8, $\frac{n}{(a+nb)^2}$.

9. $[\sqrt{(n^2+1)}-n]$. [उत्कल, 1962]

10. $\frac{1}{1+n\sqrt{(n+1)}}$ [नागपुर, 1949]

11. साइन $1/n$ [इलाहाबाद, 1957]

12. सिद्ध करो कि श्रेणी

$$\frac{\text{लघु } 2}{2}+\frac{\text{लघु } 3}{3}+\frac{\text{लघु } 4}{4}+\cdots+\frac{\text{लघु } n}{n}+\cdots$$

अपसारी है। [लखनऊ, 1954]

6·7. अनुपात परीक्षा : किसी धन पदों की श्रेणी का अभिसरण ज्ञात करने में अनुपात-परीक्षा अधिकतम उपयोगी होती हैं। ये चार हैं: डिलैम्बर्ट-परीक्षा, राबे-परीक्षा, लघुगणकीय-परीक्षा और गौस-परीक्षा। इन परीक्षाओं का अनुप्रयोग इसी क्रम में करना सुविधाजनक रहता है।

6·71. डिलैम्बर्ट-परीक्षा : *एक धन पदों की श्रेणी Σu_n, अभिसारी है यदि, n के समस्त मान के लिए,*

$$\frac{u_n+1}{u_n}<k<1,$$

जिसमें k एक नियत संख्या है।

यह श्रेणी अपसारी है यदि, n के समस्त मान के लिए,

$$\frac{u_n+1}{u_n}\geqslant 1.$$

क्योंकि, n के समस्त मान के लिए,

$$\frac{u_n+1}{u_n} < k < 1,.$$

$$\therefore \frac{u_n}{u_1} = \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_2}{u_1} < k^{n-1},$$

और अतएव $u_n < u_1 k^{n-1}$.

परंतु $\Sigma u_1 k^{n-1}$ अभिसारी है, अतएव Σu_n भी अभिसारी है।

पुनः, यदि, n के समस्त मान के लिए,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1,$$

तो $$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n \geqslant n u_1$$

परंतु $\underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} \; nu_1 = \infty$; अतएव Σu_n अपसारी है।

उप प्रमेय : यदि

$$\underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$

तो Σu_n अभिसारी है जब कि $l <$ । और अपसारी जब कि $l > 1$ ।

क्योंकि, यदि $l < 1$ और k इस प्रकार से चुना जाये कि $l < k < 1$; तो सीमा की परिभाषा के अनुसार, $n > m$ के लिए, जब कि m एक नियत संख्या है,

$$\frac{u_{n+1}}{un} < k.$$

अतएव

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots$$

अभिसारी है। अतः Σu_n भी अभिसारी है।

पुनः, यदि $l >$ ।, तो एक ऐसा m ज्ञात किया जा सकता है कि $n > m$ के लिए

$$u_{n+1} > u_n.$$

अतएव

$$u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+u_{m+4}+\ldots\ldots\ldots$$

अपसारी है। अतः Σu_n भी अपसारी है।

6·72. डिलैम्बर्ट-परीक्षा के विषय में दो निम्नलिखित ध्यान देने योग्य बातें हैं :

(i) यदि प्रतिबंध एक नियत पद से एवं उसके पश्चात् सत्य हो, तो भी पूर्वोक्त प्रमेय सत्य है।

(ii) यदि सीमा $u_{n+1}/u_n=1$, तो श्रेणी अभिसारी एवं अपसारी दोनों ही हो सकती हैं। उदाहरणार्थ, दो श्रेणी

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots,+\frac{1}{n}+\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

में से प्रथम अपसारी और द्वितीय अभिसारी है, यद्यपि दोनों में

$$\text{सीमा}\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=1\,.$$

ऐसी दशा में कहते हैं कि परीक्षा असफल हो गई और दूसरी किसी परीक्षा का अनुप्रयोग करते हैं।

6·73. राबे-परीक्षा : *एक घन पदों की श्रेणी Σu_n अभिसारी है यदि*

$$\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right\}>1$$

और अपसारी यदि यह सीमा >1.

कल्पना करो कि सहायक श्रेणी Σn^{-p} है, जो कि अभिसारी है यदि $p>1$; तो

$$\frac{v_n}{v_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^p,$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p,$$

$$= 1 + \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{2n^2} + \dots,$$

अथवा

$$n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1\right) = p + \frac{p(p-1)}{2n} \dots\dots\dots$$

अतः $$\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\; n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1\right) = p. \quad \dots \qquad (1)$$

अब यदि

$$\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\; n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > p,$$

जब कि $p > 1$, तो (1) से

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{v_n}{v_{n+1}},$$

और अतएव $\Sigma\, u_n$ अभिसारी है।

परंतु यदि

$$\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\; n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < p,$$

जिसमें कि $p < 1$, तो पुनः (1) से

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{v_n}{u_{n+1}},$$

और अतएव $\Sigma\, u_n$ अभिसारी है।

6·74. राबे-परीक्षा का अनुप्रयोग तब ही करते हैं जब कि डिलैम्बर्ट-परीक्षा असफल हो जाती है। जब राबे-परीक्षा भी असफल हो जाती है, तो अन्य अनुपात परीक्षा का आश्रय लेना पड़ता है। परंतु कभी-कभी निम्नलिखित सामान्य नियम का अनुप्रयोग लाभकारी हो जाता है:

एक धन पदों की श्रेणी Σu_n अपसारी है यदि

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$$

n का वीजीय फलन है जों कि 1 की ओर प्रवृत्त होता है जब कि $n \to \infty$.

इस नियम को श्रेणी Σu_n की मानक श्रेणी $\Sigma 1/n(\text{ लघु } n)^p$ से तुलना कर सरलता से प्रमाणित कर सकते हैं।

वीजीय फलन वह फलन है जिसमें केवल n के घात होते हैं परंतु उसके लघुगणक अथवा घातीय नहीं।

6·75. लघुगणकीय-परीक्षा : लघुगणकीय परीक्षा राबे-परीक्षा का एक विकल्प है और इसका अनुप्रयोग तब करते हैं जब कि सीमा $u_n/u_{n+1}=1$ और u_n/u_{n+1} का लघुगणक लेने से सीमा ज्ञात करना सरलतर हो जाता है। यह परीक्षा निम्नलिखित है:

एक धन पदों की श्रेणी Σu_n अभिसारी है, यदि

$$\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\; n \text{ लघु } \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1.$$

और अपसारी यदि यह सीमा < 1.

कल्पना करो कि सहायक श्रेणी Σn^{-p} है; तो

$$\frac{v_n}{v_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=1+\frac{p}{n}+\frac{p(p-1)}{2n^2}+\ldots\ldots.$$

$$\therefore \text{ लघु } \frac{v_n}{v_{n+1}}=\text{ लघु }\left\{1+\frac{p}{n}+\frac{p(p-1)}{2n^2}+\ldots\ldots\right\},$$

$$=\frac{p}{n}+\frac{p(p-1)}{2n^2}+\ldots\ldots,$$

अथवा, $$n \text{ लघु } \frac{v_n}{v_{n+1}}=p+\frac{p(p-1)}{2n}+\ldots\ldots$$

अब यदि

$$\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\; n \text{ लघु } \frac{u_n}{u_{n+1}} > p,$$

जब कि $p > 1$, तो

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{v_n}{v_{n+1}},$$

और अतएव श्रेणी अभिसारी है ।

परंतु यदि

$$\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ n \text{ लघु } \frac{u_n}{u_{n+1}} < p,$$

जब कि $p < 1$, तो

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{v_n}{v_{n+1}},$$

और अतएव श्रेणी अपसारी है।

6·76. गौस परीक्षा : जब लघुगणकीय-परीक्षा विफल हो जाती है तो गौस परीक्षा का, जो निम्नलिखित है, अनुप्रयोग करते हैं :

एक धन पदों की श्रेणी Σu_n अभिसारी है, यदि

$$\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\left[\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right\}\text{ लघु } n\right] > 1$$

और अपसारी यदि यह सीमा < 1.

कल्पना करो कि सहायक श्रेणी का n^{th} पद

$$v_n = \frac{1}{n(\text{ लघु } n)^p};$$

तो

$$\begin{aligned}\frac{v_n}{v_{n+1}} &= \frac{n+1}{n}\left[\frac{\text{लघु } (n+1)}{\text{लघु } n}\right]^p,\\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[\frac{\text{लघु } n + \text{लघु } (1+1/n)}{\text{लघु } n}\right]^p,\\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{1}{n \text{ लघु } n}-\frac{1}{2n^2 \text{ लघु } n}+\dots\right]^p,\\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{p}{n \text{ लघु } n}-\frac{p}{2n^2 \text{ लघु } n}\dots\right),\\ &= 1+\frac{1}{n}+\frac{p}{n \text{ लघु } n}+\frac{p}{2n^2 \text{ लघु } n}+\dots\dots,\end{aligned}$$

अथवा $$\left[n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1\right) - 1 \right] \text{लघु } n = p - \frac{p}{2n} + \dots .$$

अब यदि

$$\underset{\to \infty}{\text{सीमा}} \left[\left\{ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right\} \text{लघु } n \right] > p,$$

जब कि $p > 1$, तो

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{v_n}{v_{n+1}},$$

और अतएव श्रेणी अभिसारी है।

परन्तु यदि

$$\underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} \left[\left\{ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right\} \text{लघु } n \right] < p,$$

जब कि $p < 1$, तो

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{v_n}{v_{n+1}},$$

और अतएव श्रेणी अपसारी है।

6·77. उदाहरण : (i) *श्रेणी*

$$1 + \frac{2^p}{2!} + \frac{3^p}{3!} + + \frac{4}{4!} + \dots$$

के अभिसरण की परीक्षा करो। [विक्रम 1962]

यहाँ $$u_n = \frac{n^p}{n!},$$

और $$u_{n+1} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)!}.$$

$$\therefore \underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \cdot (n+1) = \infty,$$

जो कि p के समस्त मान के लिए 1 से बड़ी है।

अतः श्रेणी अभिसारी है।

(ii) *श्रेणी*

$$1+\frac{2}{5}x+\frac{6}{9}x^2+\frac{14}{17}x^3+\ldots+\frac{2^n-2}{2^n+1}x^{n-1}+\ldots$$

की अभिसरण के लिए परीक्षा करो। [बड़ौदा, 1960]

प्रथम पद की उपेक्षा करने पर

$$u_n=\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}+1}x^n,$$

और $$u_{n+1}=\frac{2^{n+2}-2}{2^{n+2}+1}x^{n+1}$$

$$\therefore \underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\frac{2^{n+2}+1}{2^{n+2}-2}\cdot\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}+1}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\frac{1+2^{-n-2}}{1-2^{-n-1}}\cdot\frac{1-2^{-n}}{1+2^{-n-1}}\cdot\frac{1}{x},$$

$$=\frac{1}{x}.$$

अतएव श्रेणी अभिसारी जब $x>1$ और अपसारी जब $x<1$.

यदि $x=1$, तो

$$\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}u_n=\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}+1},$$

$$=\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\frac{1-2^{-n}}{1+2^{-n-1}},$$

$$=1,$$

जो कि शून्य नहीं है। अतः श्रेणी अपसारी है जब $x=1$.

(iii) *श्रेणी*

$$\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}+\frac{x^4}{4.5}+\ldots,x>0$$

की अभिसरण-परीक्षा करो। [पटना, 1957]

यहाँ $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} x = x.$

अतः श्रेणी अभिसारी है जब $x<1$ और अपसारी जब $x>1$.

जब $x=1$, तो $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, यदि अब $u_n = \frac{1}{n^2}$ लें, तो

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = 1,$$

जो कि परिमित और अशून्य है। परन्तु Σv_n अभिसारी है, अतः Σu_n भी अभिसारी होगी जब $x=1$.

(iv) *निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण और अपसरण की परीक्षा करो :—*

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots\ldots$$

[बड़ोदा, 1959]

प्रथम पद की उपेक्षा करने पर

$$u_n = \frac{1.3.5.\ldots(2n-1)}{2.4.6.\ldots\ 2n} x^n,$$

और
$$u_{n+1} = \frac{1.3.5.\ldots(2n+1)}{2.4.6.\ldots(2n+2)} x^{n+1},$$

$$\therefore \lim_{u\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

अतएव जब $x<1$, श्रेणी अभिसारी है; और जब $x>1$, श्रेणी अपसारी है। जब $x=1$,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1},$$

अथवा
$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{n}{2n+1},$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \tfrac{1}{2},$$

जो कि 1 से कम है। अतएव जब $x=1$, श्रेणी अपसारी है।

(v) श्रेणी

$$x+\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{3^3x^3}{3!}+\frac{4^4x^4}{4!}+\ldots\ldots$$

के अभिसरण की x के धन मान के लिए परीक्षा करो। [जबलपुर, 1962]

यहाँ $$u_n=\frac{n^n x^n}{n!},$$

और $$u_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\therefore \underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ \frac{u_n}{u_{n+1}}=\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ \frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{1}{x},$$

$$=\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ \frac{1}{(1+1/n)^n}\cdot\frac{1}{x},$$

$$=\frac{1}{ex}.$$

अतएव जब $x<(1/e)$, तो श्रेणी अभिसारी है, और जब $x>(1/e)$, श्रेणी अपसारी है।

जब $x=1/e$, तो सीमा$=1$ और परीक्षा असफल हो जाती है। अब $x=1/e$ रखने पर

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{e}{(1+1/n)^n}$$

अथवा $$\text{लघु}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\text{लघु}\ e-n\ \text{लघु}\ (1+1/n),$$

$$=1-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\ldots\right),$$

$$=\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}+\ldots\ldots,$$

$$\therefore \underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ n\ \text{लघु}\ \frac{u_n}{u_{n+1}}=\tfrac{1}{2},$$

जो कि 1 से कम है। अतएव जब $x=1/e$ श्रेणी अपसारी है।

(vi) ज्ञात करो कि श्रेणी

$$\frac{a}{b}+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}+\frac{a(a+1)\,(a+2)}{b(b+1)\,(b+2)}+\dots$$

अभिसारी है अथवा अपसारी। [गोरखपुर, 1959]

यहाँ $u_n=\dfrac{a(a+1)(a+2)\,\dots\,(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\,\dots\,(b+n-1)}$,

और $u_{n+1}=\dfrac{a(a+1)(a+2)\,\dots\,(a+n-1)(a+n)}{b(b+1)(b+2)\,\dots\,(b+n-1)(b+n)}$.

$$\therefore \underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ \frac{a+n}{b+n}=1;$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ n\left(\frac{b+n}{a+n}-1\right),$$

$$=\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ \frac{n(b-a)}{a+n},$$

$$=b-a.$$

अतएव श्रेणी अभिसारी है जब $b-a>$ । और अपसारी जब $b-a<1$. जब $b-a=1$, तो श्रेणी अपसारी है क्योंकि

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\frac{n(b-a)}{a+n},$$

n का बीजीय फलन है जो कि 1 की ओर प्रवृत्त होता है जब $n\to\infty$.

(vii) निम्नलिखित श्रेणी की परीक्षा करो :

$$\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}+\dots.$$ [लखनऊ, 1958]

यहाँ

$$u_n=\frac{1^2.3^2.5^2.\,\dots\,(2n-1)^2}{2^2.4^2.6^2.\,\dots\,(2n)^2};$$

और

$$u_{n+1} = \frac{1^2.3^2.5^2. \dots (2n-1)^2 \ (2n+1)^2}{2^2.4^2.6^2. \dots \ (2n)^2 \ \ (2n+2)^2}.$$

$$\therefore \quad \underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2}.$$

अतः डिलैम्बर्ट-परीक्षा असफल हो जाती है।

पुनः

$$\underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} \ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} \frac{4n^2+3n}{4n^2+4n+1} = 1.$$

अतः राबे-परीक्षा भी असफल रहती है। अब हम गौस-परीक्षा के अनुप्रयोग से देखते हैं कि

$$\underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} \left[\ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1 \ \right] \text{लघु } n$$

$$= \underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} \frac{-n \ (n+1)}{4n^2+4n+1} \cdot \frac{\text{लघु } n}{n} = 0,$$

क्योंकि $\underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} \frac{\text{लघु } n}{n} = 0.$

अतः श्रेणी अपसारी है।

प्रश्नावली

निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण और अपसरण की परीक्षा करो :

1. $\frac{1}{1+2} + \frac{2}{1+2^2} + \frac{3}{1+2^3} + \dots\dots\dots$

2. $1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots + \frac{n!}{n^n} + \dots\dots\dots$ [लखनऊ, 1958]

3. $1 + \frac{p+1}{q+1} + \frac{1}{2} \ \frac{(p+1) \ (2p+1)}{(q+1) \ (2q+1)} +$

$\frac{1}{3} \ \frac{(p+1) \ (2p+1)(3p+1)}{(q+1) \ (2q+1) \ (3q+1)}$

$+ \dots$ [लखनऊ, 1956]

निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण की परीक्षा x के धन मान के लिए करो :

4. $1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\ldots.$

5. $x+\frac{3}{5}x^2+\frac{8}{10}x^3+\frac{15}{17}x^4+\ldots+\frac{n^2-1}{n^2+1}x^n+\ldots\ldots.$

[राजस्थान, 1960]

6. $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{10}x^3+\ldots+\frac{x^n}{n^2+1}+\ldots\ldots.$

[दिल्ली, 1951]

7. $\frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{x+2}+\frac{x^3}{x+3}+\ldots+\frac{x^n}{x+n}+\ldots\ldots.$

8. $\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{x^2}{3\sqrt{2}}+\frac{x^4}{4\sqrt{3}}+\frac{x^6}{3\sqrt{4}}+\ldots\ldots.$

[आगरा, 1960]

ज्ञात करो कि निम्नलिखित श्रेणियाँ अभिसारी हैं अथवा अपसारी :

9. $1+a+\frac{a(a+1)}{1.2}+\frac{a(a+1)\ (a+2)}{1.2.3}+\ldots.$

[राजस्थान, 1959]

10. $\frac{1^2}{4^2}+\frac{1^2.5^2}{4^2.8^2}+\frac{1^2.5^2.9^2}{4^2.8^2.12^2}+\ldots.$ [अलीगढ़, 1950]

11. $\frac{2^2.4^2}{3^2.3^2}+\frac{2^2.4^2.5^2.7^2}{3^2.3^2.6^2.6^2}+\ldots\ldots.$

$$+\frac{2^2.4^2.5^2..7^2.\ldots.(3n-1)^2\ (3n+1)^2}{3^2.3^2.6^2.6^2.\ldots\qquad.(3n)^2\ (3n)^2}+\ldots.$$

[लखनऊ, 1948]

12. $x^2+\frac{2^2}{3.4}x^4+\frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}x^6+\frac{2^2.4^2.6^2}{3.4.5.6.7.8}x^8+\ldots$

[विक्रम, 1959]

निम्नलिखित श्रेणियों को x के धन मान के लिए अभिसरण परीक्षा करो:

13. $\Sigma \dfrac{3n+1}{4n+3} x^n.$ [लखनऊ, 1957]

14. $\dfrac{nx^n}{n^2+1}.$ [आंन्ध्र, 1955]

15. $\Sigma \dfrac{a^n}{a^n+x^n}.$ [लखनऊ, 1953]

16. $\Sigma \dfrac{(a+nx)^n}{n!}.$ [नागपुर, 1954]

ज्ञात करो कि निम्नलिखित श्रेणियाँ अभिसारी हैं अथवा अपसारी:

17. $\dfrac{(1+a)(1+b)}{1.2.3}+\dfrac{(2+a)(2+b)}{2.3.4}+\ldots\ldots$

$$+\frac{(n+a)(n+b)}{n(n+1)(n+2)}+\ldots\ldots$$ [इलाहाबाद, 1960]

18. $1+\dfrac{2^2}{3^2}+\dfrac{2^2.4^2}{3^2.5^2}+\dfrac{2^2.4^2.6^2}{3^2.5^2.7^2}+\ldots\ldots$

[इलाहाबाद, 1956]

19. $1+\dfrac{a(1-a)}{1^2}+\dfrac{(1+a)\,a(1-a)(2-a)}{1^2.2^2}+\ldots\ldots$

20. $1+\dfrac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\dfrac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots$$

[जवलपुर, 1962]

6·8. कोशी की मूल परीक्षा: *एक धन पदों की श्रेणी Σu_n अभिसारी है यदि, n के प्रत्येक मान के लिए, $u_n^{1/n}$ एक नियत संख्या $k<1$ से कम है।*

यह श्रेणी अपसारी है यदि, n के प्रत्येक मान के लिए, $u_n^{1/n} \geqslant 1$ ।

(i) क्योंकि $\sqrt[n]{u_n} < k < 1$, अतएव, n के समस्त मान के लिए, $u_n < r^n$, जब कि $r<1$।

अत : $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$

$$<r+r^2+r^2+\ldots+r^n+\ldots,$$

अर्थात्, $\Sigma u_n<r/(1-r)$, जो कि एक नियत संख्या है।

अतएव Σu_n अभिसारी है।

(ii) यदि $\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$, तो n के समस्त मान के लिए, $u_n\geqslant 1$ । अतः श्रेणी अपसारी है।

उप-प्रमेय : श्रेणी Σu_n अभिसारी है यदि सीमा $\sqrt[n]{u_n}<1$ और अपसारी है यदि सीमा $\sqrt[n]{u_n}>1$.

यदि सीमा $\sqrt[n]{u_n}=1$ तो परीक्षा असफल हो जाती है।

इसका प्रमाण §6.71 के उप-प्रमेय के समान है।

टिप्पणी : यदि प्रतिबंध एक नियत पद से एवं उसके पश्चात् सत्य हो, तो भी पूर्वोक्त प्रमेय सत्य है।

6 81. डिलैम्वर्ट एवं कोशी परीक्षा की तुलना : साधारणतया डिलैम्वर्ट-परीक्षा कोशी-परीक्षा से अधिक लाभदायक है क्योंकि अधिकतर श्रेणियों में, जिनसे हम संबंधित हैं, u_{n+1}/u_n, u_n से सरलतर फलन होती है। परन्तु कोशी-परीक्षा डिलैम्वर्ट-परीक्षा की अपेक्षा अधिक व्यापक है क्योंकि.:

(i) कोशी का अपसरण का प्रतिबंध डिलैम्वर्ट के से अधिक व्यापक है। डिलैम्वर्ट परीक्षा में प्रतिबंध को एक नियत मान से अधिक n के समस्त मान के लिए संतुष्ट होना पड़ता है परंतु कोशी परीक्षण में ऐसा नहीं है।

(ii) यह दिखाया जा सकता है कि यदि $u_{n+1}/u_n\to l$, तो $\sqrt[n]{u_n}\to l$; परंतु यदि $\sqrt[n]{u_n}=l$, तो यह आवश्यक नहीं है कि u_{n+1}/u_n किसी सीमा की ओर प्रवृत्त हो।

इन कारणों से यह आशा की जा सकती है कि डिलैम्वर्ट-परीक्षा के असफल होने पर भी कोशी परीक्षा सफल हो सकती है। उदाहरणार्थ, श्रेणी

$$a+b+a^2+b^2+a^3+b^3+\ldots$$

में

$$\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}=\left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}=a\left(\frac{a}{b}\right)^n$$

और इस कारण डिलैम्वर्ट परीक्षा असफल हो जाती है परंतु n के विषम व सम होने

के अनुसार $n\sqrt{u_n} = \sqrt{a}$ अथवा $\sqrt{b}$ और अतः श्रेणी अभिसारी है जब कि $0 < a < 1$ और $0 < b < 1$ और अपसारी जब कि $a \geqslant 1$, अथवा जब कि $b \geqslant 1$. इस प्रकार कोशी परीक्षा सफल हो जाती है।

6·82. उदाहरण: *श्रेणी*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} - \frac{n+1}{n} \right\}^{-n}$$

के अभिसरण की परीक्षा करो। [लखनऊ, 1960]

यहाँ
$$(u_n)^{\frac{1}{n}} = \left\{ \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} - \frac{n+1}{n} \right\}^{-1},$$
$$= \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right\}^{-1}.$$

$$\therefore \quad \underset{n \to \infty}{\text{सीमा}} \sqrt[n]{u_n} = 1/(e-1) < 1.$$

अतः श्रेणी अभिसारी है।

प्रश्नावली

ज्ञात करो कि वे श्रेणीयाँ, जिनके व्यापक पद निम्नलिखित हैं, अभिसारी हैं अथवा अपसारी :

1. $(a + x/n)^n$ [इलाहाबाद, 1960]
2. $(1 + 1/n)^{-n^2}$.
3. $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{3/2}}$ [पंजाब, 1941]
4. $^{-n\,x}$.
5. $\left\{ \frac{\text{लघु}\, n}{\text{लघु}\,(n+1)} \right\}^{n^2\,\text{लघु}\,n}$.

धन और ऋण पदों की श्रेणियां

6.9. एकान्तर श्रेणी : अब तक हमने उन श्रेणियों का अध्ययन किया है जिनके समस्त पद धन हैं। अब हम ऐसी श्रेणी का विवेचन करेंगे जिनमें कुछ पद ऋण और कुछ पद धन हों।

यदि किसी श्रेणी के पद एकांतरतः धन और ऋण हों तो ऐसी श्रेणी **एकांतर श्रेणी** कहते हैं। एकांतर श्रेणी का अभिसरण निम्नलिखित परीक्षा द्वारा ज्ञात कर सकते हैं :

6·91. लाइब्रनिट्ज-परीक्षा : *अनंत श्रेणी*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots\cdots ,$$

जिसके पद एकांतरतः धन और ऋण है, अभिसारी है यदि प्रत्येक पद का संख्यात्मक मान पूर्वगत पद से कम है और सीमा $u_n = 0$, *जब कि* $n \to \infty$.

निर्दिष्ट श्रेणी के प्रथम $2n$ पदों को निम्नलिखित दो प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$(u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n}), \qquad (1)$$

$$u_1 - \{(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \ldots + (u_{2n-2} - u_{2n-1}) + u_{2n}\} \qquad (2)$$

अब, क्योंकि परिकल्पना के अनुसार,

$$u_1 > u_2 > u_3 > \cdots\cdots ,$$

अतएव (1) और (2) के कोष्ठकों के अंदर के व्यंजक धन हैं। इस कारण (1) से प्रमाणित है कि S_{2n} धन है और n के साथ साथ बढ़ता है, तथा साथ से प्रमा- णित है कि S_{2n} सदैव u_1 से कम है।

अतः S_{2n} एक परिमित सीमा की ओर प्रवृत्त होता है जब कि $n \to \infty$.

पुनः, क्योंकि

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1} ,$$

और $$\text{सीमा}_{n \to \infty} u_{n+1} = 0,$$

अतः $$\text{सीमा}_{n \to \infty} S_{2n+1} = \text{सीमा}_{n \to \infty} S_{2n} ;$$

अर्थात्, S_n एक ही सीमा की ओर प्रवृत्त होता है, चाहे n विषम हो अथवा सम।

अतएव, परिभाषा के अनुसार, निर्दिष्ट श्रेणी अभिसारी है।

उप-प्रमेय : (i) यदि एकांतर श्रेणी

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-)^{n-1} u_n + \cdots\cdots$$

का प्रत्येक पद पूर्वगत पद से लघु है और यदि

सीमा $u_n = l\ (\neq 0)$, जब कि $n \to \infty$, तो श्रेणी दो मान, जिनका अंतर l है, के मध्य परिमित दोलन करती है। यह स्पष्टतया सत्य है क्योंकि

$$\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ S_{2n+1} - \underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ S_{2n} = \underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\ u_{2n+1} = l.$$

(ii) यदि सीमा $u_n = \infty$, जब कि $n \to \infty$, तो एकांतर श्रेणी

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$$

अनंत दोलन करती है।

6.92. परम अभिसरण : कल्पना करो कि

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

एक श्रेणी है, जिसमें कोई पद धन अथवा ऋण हो सकता है, तो श्रेणी

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

का प्रत्येक पद धन और संख्यानुसार श्रेणी Σu_n के संगत पद के बराबर है।

यदि श्रेणी Σu_n अभिसारी है, तो यह आवश्यक नहीं है कि श्रेणी $\Sigma |u_n|$ भी अभिसारी हो। उदाहरणार्थ, श्रेणी

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots\ \ldots\ \ldots$$

अभिसारी है, परन्तु धन पदों की संगत श्रेणी

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots\ \ldots\ldots$$

अपसारी है।

उस श्रेणी को, जिसमें धन और ऋण पद हैं, ***परम अभिसारी*** श्रेणी कहते हैं जब कि श्रेणी $\Sigma |u_n|$ अभिसारी है।

यदि Σu_n अभिसारी और $\Sigma |u_n|$ अपसारी है, तो Σu_n को ***सप्रतिबंध अभिसारी श्रेणी*** कहते हैं।

उदाहरणार्थ,

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots\ \ldots\ldots$$

सप्रतिबंध अभिसारी श्रेणी तथा

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$$

परम अभिसारी श्रेणी है।

कोई परम अभिसारी श्रेणी अभिसारी भी है, क्योंकि

$$\sum_{1}^{\infty} u_n < \sum_{1}^{\infty} |u_n|$$

किसी परम अभिसारी श्रेणी के पदों के क्रम भंग अथवा वर्गीकरण से उसके अभिसरण अथवा योगफल पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

यह गुण सप्रतिबंध अभिसारी के लिए सत्य नहीं है। उदाहरणार्थ, सप्रतिबंध अभिसारी श्रेणी

$$\begin{aligned}
&1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\cdots\cdots \\
&=1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{12}+\cdots, \\
&=(1-\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{4}+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{6})-\tfrac{1}{8}+\cdots, \\
&=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{8}+\cdots, \\
&=\tfrac{1}{2}\,(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\cdots),
\end{aligned}$$

अर्थात्, क्रम भंग और वर्गीकरण से श्रेणी का योगफल आधा हो जाता है।

6.93. उदाहरण : (i) *दिखाओ कि श्रेणी*

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots$$

अभिसारी है।

यहाँ पर पद एकांतरतः धन और ऋण हैं, प्रत्येक पद का संख्यात्मक मान पूर्वगत पद से कम है और

$$\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\; u_n = \underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\; (1/n^2) = 0.$$

अतः श्रेणी अभिसारी है।

(ii) क्या श्रेणी

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots\ldots\ldots.$$

परम अभिसारी है ?

हमको ज्ञात है कि श्रेणी

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots\ldots.$$

अभिसारी नहीं है; अतः निर्दिष्ट श्रेणी परम अभिसारी नहीं है।

प्रश्नावली

ज्ञात करो कि निम्नलिखित श्रेणी अभिसारी, अपसारी अथवा दोलायमान हैं:

1. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+2a}-\frac{1}{x+3a}+\ldots\ldots.$

2. $\frac{1}{xy}-\frac{1}{(x+1)(y+1)}+\frac{1}{(x+2)(y+2)}-\frac{1}{(x+3)(y+3)}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$

3. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\text{लघु } 2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\text{लघु } 3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\text{लघु } 4}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\text{लघु } 5}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots$ [अनामलाई, 1949]

4. $\Sigma\,(-)^n\frac{x^n}{n}.$ [अलीगढ़, 1960]

5. $\Sigma\,(-)^n\frac{x^n}{\sqrt{n}}.$ [इलाहाबाद, 1954]

क्या निम्नलिखित श्रेणी परम अभिसारी हैं ?

6. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\ldots.$

7. $2-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\ldots\quad.$ [राजस्थान, 1959]

8. $1-2x+3x^2-4x^3+\ldots.$

विविध प्रश्नावली

ज्ञात करो कि निम्नलिखित श्रेणियाँ अभिसारी हैं अथवा अपसारी :

1. $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{1}{3}\right)^3+\ldots.$

[लखनऊ, 1956]

2. $\frac{1}{1+2^{-1}}+\frac{2}{1+2^{-2}}+\frac{3}{1+2^{-3}}+\ldots.$

[आगरा, 1962]

3. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{3}{2.3.4}+\frac{5}{3.4.5}+\ldots.$

[सागर, 1955]

4. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}+\ldots.$

[राजस्थान, 1950]

5. $\frac{(\text{लघु } 2)^2}{2^2}+\frac{(\text{लघु } 3)^2}{3^2}+\ldots+\frac{(\text{लघु } n)^2}{n^2}+\ldots.$

6. $\frac{1}{(\text{लघु} 2)^p}+\frac{1}{(\text{लघु } 3)^p}+\ldots+\frac{1}{(\text{लघु } n)^p}+\ldots$

7. $1^p+\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^p+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^p\ \ldots.$

[बम्बई, 1954]

उन श्रेणी की अभिसरण-परीक्षा करो जिनके n के पद निम्नलिखित हैं :

8. $\frac{(n+2)(n+4)}{n(n+3)(n+5)}$ [कलकत्ता, 1948]

9. $\left(\frac{n^2+1}{15+2n^3}\right)^{1/3}.$ [त्रावणकोर, 1946]

10. $\frac{1}{x^n+x^{-n}}.$ [बम्बई, 1952]

11. $\frac{n^p}{(n+1)^q}.$ [अनामलाई, 1942]

12. $\dfrac{\sqrt{(n+1)}-\sqrt{n}}{n^p}$. [इलाहाबाद, 1949]

13. $\sqrt[3]{(n+1)}-\sqrt[3]{n}$. [लखनऊ, 1960]

14. $\sqrt{(n^4+1)}-\sqrt{(n^4-1)}$ [दिल्ली, 1960]

15. $\sqrt{(n^3+1)}-\sqrt{n^3}$. [मैसूर, 1953]

16. $\dfrac{n^3+a}{2^n+a}$. [नागपुर, 1948]

17. $\dfrac{(3.6.9. \ldots \quad 3n)\ 2^n}{4.7.10. \ldots (3n+1)(3n+2)}$. [अनामलाई, 1947]

18. $\dfrac{1.3.5. \ldots (2n-1)}{2.4.6. \ldots \quad 2n}\ (1-x^2)^n,\ 0 \leqslant x^2 < 1$. [लखनऊ, 1953]

निम्नलिखित श्रेणियों की x के धन मान के लिए, अभिसरण परीक्षा करो:

19. $1+\dfrac{3}{7}x+\dfrac{3.6}{7.10}x^2+\dfrac{3.6.9}{7.10.13}x^3+\dfrac{3.6.9.12}{7.10.1316}x^4+\ldots$. [सागर, 1958]

20. $2x+\dfrac{3x^2}{8}+\dfrac{4x^3}{27}+\ldots+\dfrac{n+1}{n^3}x^n+\ldots$. [पटना, 1952]

21. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1\cdot3}{2.4}\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8.}\dfrac{x^5}{10}+\ldots$. [उत्कल, 1947]

22. $\dfrac{x}{1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{1.3}{2\cdot4}\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{1.3.5}{2.4.6}\dfrac{x^7}{7}+\ldots$. [लखनऊ, 1962]

23. $\dfrac{x}{1^1}+\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{x^3}{3^2}+\ldots$. [आगरा, 1959]

24. $1+\dfrac{2x}{2!}+\dfrac{3^2x^2}{3!}+\dfrac{4^3x^3}{4!}+\dfrac{5^4x^4}{5!}+\ldots$. [वाराणसी, 1949]

25. $1+\frac{1}{2}x+\frac{2!}{3^2}x^2+\frac{3!}{4^3}x^3+\frac{4!}{5^4}x^4+\dots$

[सागर, 1962]

26. $\frac{a}{b}+\frac{a(a+c)}{b(b+c)}x+\frac{a(a+c)(a+2c)}{b(b+c)(b+2c)}x^2+\dots\dots$

27. x^2(लघु2)$^q+x^3$ (लघु 3)$^q+x^4$ (लघु 4)$^q+\dots\dots$

[लखनऊ, 1960]

28. यदि $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n^k+An^{k-1}+Bn^{k-2}+Cn^{k-3}+\dots}{n^k+an^{k-1}+bn^{k-2}+cn^{k-3}+\dots}$,

जिसमें k एक धन पूर्ण राशि है, तो दिखाओ कि

$$u_1+u_2+u_3+\dots\dots$$

अभिसारी है जब $A-a-1$ धन है और अपसारी जब $A-a-1$ ऋण अथवा शून्य है। [इलाहाबाद, 1943]

29. यदि श्रेणी Σu_n, जिसका प्रत्येक पद धन है, अभिसारी हो, तो सिद्ध करो कि Σu_n^2 भी अभिसारी है। [लखनऊ, 1953]

30. यदि Σu_n अभिसारी है, तो दिखाओ कि $\Sigma u_n/(1+u_n)$ भी अभिसारी है। [लखनऊ, 1957]

31. यदि Σu_n अभिसारी है और $u_n\neq 1$, तो $\Sigma u_n/(1-u_n)$ की अभि- सरण परीक्षा करो। [लखनऊ, 1950]

32. यदि Σu_n^2 अभिसारी है, तो श्रेणी (*i*) $\Sigma u_n/n$, और (*ii*) $\Sigma u_n/\{\sqrt{n}$ लघु$_n\}$ की अभिसरण परीक्षा करो।

[लखनऊ, 1950]

———

अध्याय 7

आवर्ती श्रेणी

7·1. कल्पना करो कि श्रेणी

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_r x^r + \ldots$$

में किसी परिमित संख्या से और उसके पश्चात् $(m+1)$ क्रमिक पदों के गुणांक

$$u_n + p_1 u_{n-1} + p_2 u_{n-2} + \ldots + p_m u_{n-m} = 0,$$

जिसमें m एक नियत धनात्मक पूर्ण संख्या और $p_1, p_2, \ldots, p_m$ अचर हैं, के समरूप सम्वंध से जुड़े हैं; तो श्रेणी (1) को ***आवर्ती श्रेणी*** कहते हैं। क्रमिक गुणांकों को सम्बद्ध करने वाले समीकरण (2) को आवर्ती श्रेणी की *सम्बन्ध-मापनी* कहते हैं।

उदाहरणार्थ, श्रेणी

$$2 + 3x + 5x^2 + 9x^3 + \ldots$$

एक आवर्ती श्रेणी है और इसकी सम्वंध-मापनी

$$u_n - 3u_{n-1} + 2u_{n-2} = 0.$$

है।

7·2. सम्बन्ध-मापनी से आवर्ती श्रेणी ज्ञात करना : यदि किसी आवर्ती श्रेणी की सम्वंध-मापनी और उसके प्रारम्भ के पद पर्याप्त संख्या में दिए हों, तो उस श्रेणी के जितने पद चाहें उतने पद ज्ञात कर सकते हैं।

कल्पना करो कि किसी आवर्ती श्रेणी की सम्वंध-मापनी

$$u_n - 3u_{n-1} + 2u_{n-2} = 0$$

है; तो

$$u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} \,.$$

अतः

$$u_2 = 3u_1 - 2u_0 \,,$$
$$u_3 = 3u_2 - 2u_1 \,,$$
$$u_4 = 3u_3 - 2u_2 \,,$$

इत्यादि।

स्पष्टतया, यदि आवर्ती श्रेणी के प्रथम दो पद दिए हों, तो उसके जितने पद चाहें उतने पद ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरणार्थ, यदि प्रथम दो पद 2 और $3x$ हों, तो

$$u_2 = 3.3 - 2.2 = 5,$$

$$u_3 = 3.5 - 2.3 = 9,$$

$$u_4 = 3.9 - 2.5 = 17,$$

इत्यादि और आवर्ती श्रेणी

$$2 + 3x + 5x^2 + 9x^3 + 17x^4 + \ldots$$

है।

73. आवर्ती श्रेणी से सम्बंध-मापनी ज्ञात करना : हमने पूर्वगत अनुच्छेद में देखा है कि किसी आवर्ती श्रेणी की सम्बंध-मापनी और प्रथम कुछ पदों की सहायता से उस श्रेणी के शेष पद ज्ञात किए जा सकते हैं। अब हम यह ज्ञात करेंगे कि श्रेणी ज्ञात करने के लिए न्यूनतम पदों की संख्या क्या होनी चाहिए। इसकी सहायता से निर्दिष्ट आवर्ती श्रेणी की सम्बंध-मापनी ज्ञात करने की विधि ज्ञात कर सकेंगे।

कल्पना करो कि किसी आवर्ती श्रेणी की सम्बन्ध-मापनी

$$u_n + p_1 u_{n-1} + up_{2n-2} = 0 \qquad (1)$$

के समरूप है। इसमें दो अचर p_1 और p_2 हैं और इनको ज्ञात करने के लिए दो समीकरणों की आवश्यकता है। ये समीकरण

$$\left.\begin{aligned} u_2 + p_1 u_1 + p_2 u_0 &= 0 \\ \text{और} \quad u_3 + p_1 u_2 + p_2 u_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

लिए जा सकते हैं। अतः सम्बन्ध-मापनी ज्ञात करने के लिए आवर्ती श्रेणी के चार क्रमागत पदों की आवश्यकता है।

सामान्यतः, यदि सम्बन्ध-मापनी

$$u_n + p_1 u_{n-1} + p_2 u_{n-2} + \ldots + p_m u_{n-m} = 0 \qquad (3)$$

के समरूप हो, तो इसमें m अचर होंगे और इनको ज्ञात करने के लिए m समीकरणों की आवश्यकता होगी। इनमें से प्रथम समीकरण में श्रेणी के $(m+1)$ पदों के गुणांक होंगे। शेष $(m-1)$ समीकरणों में से प्रत्येक में एक अतिरिक्त गुणांक होगा। इस तरह m अचरों और उनके द्वारा सम्बन्ध-मापनी को ज्ञात करने के लिए आवर्ती श्रैणी के $(m+1)+(m-1)=2m$ क्रमागत पदों की आवश्यकता होगी।

विलोमतः, यदि किसी आवर्ती श्रेणी के $2m$ क्रमागत पद दिए हों, तो हम (3) के समरूप सम्बन्ध मानकर m अचर $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$ को m समीकरणों की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं। यदि सम्बन्ध-मापनी में m से कम अचर होंगे, तो एक या अधिक अचर $p_m, p_{m-1}, \ldots$ का मान शून्य आ जाएगा।

यदि किसी आवर्ती श्रेणी के दिए हुए क्रमागत पदों की संख्या $2m+1$ हो, तो भी (3) के समरूप सम्बन्ध-मापनी मानी जा सकती है। परन्तु अब m अचर $p_1, p_2, \ldots, p_m$ को सम्बद्ध करने वाले $m+1$ समीकरण लिख सकते हैं। इनमें से किन्हीं m समीकरण की सहायता से यह m अचर ज्ञात किए जा सकेंगे और शेष समीकरण इस प्रकार से प्राप्त अचरों के मान से स्वतः ही संतुष्ट हो जाएगा।

उदाहरण : *आवर्ती श्रेणी*

$$2+3x+5x^2+9x^3+\ldots\ldots \quad (1)$$

की सम्बन्धमापनी ज्ञात करो।

यहाँ $u_0=2$, $u_1=3$, $u_2=5$ और $u_3=9$; अतएव कल्पना करो कि श्रेणी (1) की सम्बन्ध-मापनी

$$u_n+p_1u_{n-1}+p_2u_{n-2}=0$$

है।

सम्बन्ध (2) में $n=2$ और $n=3$ प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$5+3p_1+2p_2=0,$$
$$9+5p_1+3p_2=0.$$

इन समीकरणों को हल करने पर $p_1=-3$ और $p_2=2$ प्राप्त होता है। अतः

$$u_n-3u_{n-1}+2u_{n-2}=0$$

वांछित सम्बन्ध-मापनी है।

प्रश्नावली

1. यदि किसी आवर्ती श्रेणी के प्रथम दो पद $2+3x$ और सम्बन्ध मापनी

$$u_n-3u_{n-1}+5u_{n-2}=0$$

हो, तो श्रेणी के अगले तीन पद ज्ञात करो।

2. उस आवर्ती श्रेणी की सम्बन्ध-मापनी ज्ञात करो जिसके प्रथम चार पद

$$1+2x+5x^2+14x^3$$

हैं।

3. आवर्ती श्रेणी

$$2+7x+25x^2+91x^3+\ldots$$

की सम्बन्ध-मापनी ज्ञात करो।

4. दिखाओ कि श्रेणी $\Sigma(5+3^n)x^n$ एक आवर्ती श्रेणी है।

5. दिखाओ कि निम्नलिखित व्यापक पद वाली श्रेणी आवर्ती श्रेणी हैं और उनकी सम्बन्ध-मापनी ज्ञात करो।

(i) $u_n=A+Bn+Cn^2$,

(ii) $u_n=3^nA+4^nB.$

7·4. श्रेणी संकलम : ***किसी आवर्ती श्रेणी***

$$u_0+u_1x+u_2x^2+\ldots \tag{1}$$

के प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात करना।

कल्पना करो कि श्रेणी (1) की सम्बन्ध-मापनी

$$u_n+p_1u_{n-1}+p_2u_{n-2}=0 \tag{2}$$

और प्रथम n पदों का योगफल S_n है; तो

$$S_n=u_0+u_1x+u_2x^2+\ldots+u_{n-1}x^{n-1}$$

$$p_1xS_n=\quad p_1u_0x+p_1u_1x^2+\ldots+p_1u_{n-1}x^n,$$

$$p_2x^2S_n=\qquad p_2u_0x^2+\ldots+p_2u_{n-3}x^{n-1}+p_2u_{n-2}x^n+p_2u_{n-1}x^{n+1}$$

योग लेने पर प्राप्त होता है

$$(1+p_1x+p_2x^2)S_n=u_0+(u_1+p_1u_0)x+(p_1u_{n-1}+p_2u_{n-2})x^n+p_2u_{n-1}x^{n+1},$$

क्योंकि शेषपद (2) के कारण शून्य हो जाते हैं।

अतः

$$S_n=\frac{u_0+(u_1+p_1u_0)x}{1+p_1x+p_2x^2}+\frac{(p_1u_{n-1}+p_2u_{n-2})x^n+p_2u_{n-1}x^{n+1}}{1+p_1x+p_2x^2}. \tag{3}$$

यदि किसी आवर्ती श्रेणी की सम्बन्ध-मापनी में दो से अधिक अचर हों, तो भी उसके n पदों तक का योगफल इसी प्रकार की विधि से ज्ञात कर सकते हैं।

उप-प्रमेय : (i) यदि श्रेणी (1) के n पदों का योगफल x के किसी विशेष मान α के लिए ज्ञात करना हो, तो $x=\alpha$ योगफल (3) में प्रतिस्थापित कर देते हैं। परन्तु, यदि $x=\alpha$, समीकरण

$$1+p_1x+p_2x^2=0$$

का एक मूल हो, तो वांछित योगफल ज्ञात करने के लिए S_n की सीमा, जब कि $x\to\alpha$, निकालनी पड़ती है।

(ii) यदि आवर्ती श्रेणी (1) अभिसारी हो, तो उसके अनन्त पदों तक का योगफल

$$S=\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\; S_n=\frac{u_0+(u_1+p_1u_0)x}{1+p_1x+p_2x^2},$$

क्योंकि यह सरलता से दिखाया जा सकता है कि श्रेणी (1) के अभिसारी होने के कारण

$$\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\;\frac{(u_{n-1}+p_2\,u_{n-2})x^n+p_2\,u_{n-1}x^{n+1}}{1+p_1\,x+p_2x^2}=0\,.$$

7·5. जनक-फलन : कल्पना करो कि आवर्ती श्रेणी

$$u_0+u_1x+u_2x^2+\ldots \tag{1}$$

की सम्बन्ध-मापनी

$$u_n+p_1\,u_{n-1}+p_2\,u_{n-2}=0 \tag{2}$$

है और केवल p_1, p_2, u_0, u_1, दिए हैं; तो भाग करने पर

$$\frac{u_0+(u_1+p_1u_0)x}{1+p_1x+p_2x^2}$$

$$=u_0+u_1x-\frac{(p_1u_1+p_2u_0)x^2+p_2u_1x^3}{1+p_1x+p_2x^2},$$

$$=u_0+u_1x+\frac{u_2x^2-p_2u_1x^3}{1+p_1x+x^2}\text{, (2) के कारण से,}$$

$$=u_0+u_1x+u_2x^2-\frac{(p_1u_2+p_2u_1)x^3+p_2u_2x^4}{1+p_1x+p_2x^2},$$

$$=u_0+u_1x+u_2x^2+\ldots+u_{n-1}x^{n-1}$$
$$-\frac{(p_1u_{n-1}+p_2u_{n-2})x^n+p_2u_{n-1}x^{n+1}}{1+p_1x+p_2x^2}. \quad (3)$$

इस प्रकार $(u_1+p_1u_0)x$ को $1+p_1x+p_2x^2$ से भाग कर आवर्ती श्रेणी के कितने ही पद प्राप्त किए जा सकते हैं।

वास्तव में यह x की आरोही क्रम घातों में व्यंजक

$$\frac{u_0+(u_1+p_1u_0)x}{1+p_1x+p_2x^2}$$

के विस्तार की विधि है। यह विस्तार किसी अन्य उपयुक्त विधि से भी किया जा सकता है।

व्यंजक (4) को आवर्ती श्रेणी (1) का जनक फलन कहते हैं क्योंकि इसके विस्तार से श्रेणी (1) के सब पद उत्तरोत्तर प्राप्त किए जा सकते हैं।

संबंध (3) से स्पष्ट है कि जनक फलन (4) आवर्ती श्रेणी (1) के तब ही तुल्य होगा जब कि

$$\text{सीमा}_{n\to\infty} \frac{(p_1u_{n-1}+p_2u_{n-2})x^n+p_2u_{n-1}x^{n+1}}{1+p_1x+p_2x^2} \; 0=;$$

अर्थात्, (1) अभिसारी श्रेणी हो और उस दशा में श्रेणी का जनक-फलन एवं योगफल सर्वसम होंगे। यदि श्रेणी अभिसारी न हो, तो उसके योगफल का अर्थ नहीं होता और उसका जनक फलन केवल एक औपचारिक व्यंजक होता है जिसके विस्तार से आवर्ती श्रेणी के पद ज्ञात किए जा सकते हैं।

यह दिखाया जा सकता है कि x के पर्याप्त लघु मान के लिए प्रत्येक आवर्त श्रेणी अभिसारी होती है और अतः जनक-फलन एवं योगफल सर्वसम होंगे।

7·6, व्यापक पद : हमने पूर्वगत अनुच्छेद में देखा है कि अभिसारी आवर्ती श्रेणी जनक-फलन एवं योगफल सर्वसम होते हैं,; अर्थात्,

$$\frac{u_0+(u_1+p_1u_0)x}{1+p_1x+p_2x^2}=\sum_{0}^{\infty} u_nx^n.$$

अतः आवर्ती श्रेणी का व्यापक पद u_n जनक फलन के विस्तार के व्यापक पद के बराबर होगा। जनक फलन का विस्तार आंशिक भिन्नों में विघटन कर अथवा किसी अन्य उपयुक्त विधि से किया जा सकता है।

7·7 आवर्ती श्रेणी Σu_n **:** यदि आवर्ती श्रेणी

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

के पदों में x संयुक्त न हो, तो उसके जनक-फलन इत्यादि ज्ञात करने के लिए x से संयुक्त पद वाली आवर्ती श्रेणी

$$u_0+u_1x+u_2x^2+\ldots+u_nx^n+\ldots$$

के जनक-फलन इत्यादि ज्ञात कर उसमें $x=1$ प्रतिस्थापित कर देते हैं।

7·8. उदाहरण: (i) *उस आवर्ती श्रेणी के जनक-फ़लन, व्यापक पद और प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात करो जिसके प्रथम चार पद $1-7x-x^2-43x^3$ हों।* [सागर, 1952]

कल्पना करो कि दी हुई श्रेणी की सम्बन्ध-मापनी

$$u_n+p\,u_{n-1}+q\,u_{n-2}=0$$

है; तो क्रमशः $n=2$ और 3 लेने तथा $u_3=-43$, $u_2=-1$, $u_1=-7$ और $u_0=1$ प्रतिस्थापित करने पर निम्नवर्ती समीकरण प्राप्त होते हैं

$$\left.\begin{aligned}-1-7p+q&=0,\\-43-p-7q&=0.\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\ p=-1,\ q=-6.$$

अतः सम्बन्ध-मापनी

$$u_n-u_{n-1}-6u_{n-2}=0. \qquad (1)$$

है

अब यदि जनक-फलन S हो, तो

$$S=1-7x-x^2-43x^3-\ldots$$

$$-xS=\quad -x+7x^2+x^3+\ldots.$$

$$-6x^2S=-\quad 6x^2+42x^3+\ldots.$$

योगफल लेकर $1-x-6x^2$ से भाग करने पर प्राप्त होता है

$$S=\frac{1-8x}{(1-3x)(1+2x)}, \qquad (2)$$

$$=\frac{2}{1+2x}-\frac{1}{1-3x}.$$

$$=2(1+2x)^{-1}-(1-3x)^{-1}.$$

द्विपद-सिद्धांत से विस्तार करने पर सरलता से देखा जा सकता कि

$$u_{n+1}=2(-2x)^n-(3x)^n \qquad (3)$$

दी हुई आवर्ती श्रेणी का व्यापक पद है।

अब श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल अनुच्छेद 7.4 की सहायता से सरलता से ज्ञात किया जा सकता ; परंतु निम्न-वर्ती विधि अधिक सरल पड़ती है

व्यापक पद (3) में $n=1,2,3,\ldots,n-1$ लेने पर प्रथम n पदों का योगफल

$$S_n=2\{1+(-2x)+(-2x)^2+(-2x)^3+\ldots+(-2x)^{n-1}\}$$
$$-\{1+(3x)+(3x)^2+(3x)^3+\ldots,+(3x)^{n-1}\},$$
$$=2.\ \frac{1-(-2x)^n}{1+2x}-\frac{1-(3x)^n}{1-3x}.$$

(ii) *आवर्ती श्रेणी*

$$2+6+14+30\ldots\ldots \qquad (1)$$

के प्रथम n पदों का योगफ़ल ज्ञात करो। [मद्रास, 1949]

अनुच्छेद 7·3 के अनुसार इस श्रेणी की संबंध-मापनी

$$u_n-3u_{n-1}+2u_{n-2}=0. \qquad (2)$$

अब (1) की संगत घात श्रेणी

$$2+6x+14x^2+30x^3+\ldots\ldots \qquad (3)$$

पर विचार करो।

इसका जनक फलन यदि S हो, तो

$$S=2+6x+14x^2+30x^3+\ldots$$
$$-3xS=\ \ -6x-18x^2-42x^3-\ldots$$
$$2x^2S=\qquad\qquad 4x^2+12x^3+\ldots$$

योग लेकर $1-3x+2x^2$ से भाग करने पर प्राप्त होता है

$$S=\frac{2}{1-3x+2x^2}=\frac{4}{1-2x}-\frac{2}{1-x}. \qquad (4)$$

प्रत्येक भिन्न का द्विपद-सिद्धांत से विस्तार कर, विस्तार में $x=1$ प्रतिस्थापित करने पर हम देखते हैं कि मूल श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल

$$S_n = 4(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1})$$
$$\qquad - (2+2+2+\ldots n \text{ पदों तक}),$$
$$= 4(2^n-1) - 2n,$$
$$= 2^{n+2} - 2n - 4.$$

प्रश्नावली

निम्न-लिखित आवर्ती श्रेणियों के जनक-फलन, व्यापक पद और प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात करो :

1. $2+3x+5x^2+9x^3+\ldots..$
2. $7-6x+9x^2+27x^4+\ldots.$

निम्नलिखित आवर्ती श्रेणी के प्रथम n पदों तक का योगफल ज्ञात करो :

3. $2+7x+25x^2+91x^3+\ldots$. [नागपुर, 1948]
4. $1+13+7+10+\ldots\ldots\ldots$
5. $1+2+5+12+\ldots\ldots\ldots.$

विविध प्रश्नावली

निम्नलिखित आवर्ती श्रेणी की सम्बन्ध-मापनी ज्ञात करो :

1. $2+5x+2x^2+7x^3+20x^4+61x^5+182x^6+\ldots\ldots$
2. $9-7x+14x^2-7x^3+44x^4+23x^5+254x^6+\ldots\ldots$
3. दिखाओ कि श्रेणी जिसका व्यापक पद

$$u_n = (A+B_n)2^n x^n$$

है, एक आवर्ती श्रेणी है और इसकी सम्बन्ध-मापनी ज्ञात करो।

4. दिखाओ कि श्रेणियाँ

(i) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+\ldots..$ [सागर, 1962]

(ii) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+\ldots..$

आवर्ती श्रेणी हैं और इनकी सम्बन्ध-मापनी ज्ञात करो।

निम्नलिखित आवर्ती श्रेणी की सम्बन्ध-मापनी एवं जनक-फलन ज्ञात करो :

5. $2+5x+10x^2+17x^3+26x^4+37x^5+\ldots\ldots..$

[उत्कल, 1949]

6. $3+5x+9x^2+15x^3+23x^4+33x^5+\ldots\ldots..$

[दिल्ली आ०, 1953]

निम्नलिखित आवर्ती श्रेणी के व्यापक पद ज्ञात करो:

7. $2-5x+5x^2-35x^3+\ldots.$ [कलकत्ता आ०, 1953]

8. $1+6x+24x^2+84x^3+\ldots.$ [कलकत्ता आ० 1956]

9. $4+9x+21x^2+51x^3+\ldots.$ [दिल्ली आ०, 1960]

निम्नलिखित आवर्ती श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात करो:

10. $3+8+9+14+15+20+\ldots.$ [नागपुर, 1957]

11. $2+5+13+35+97+\ldots\ldots.$ [दिल्ली आ०, 1954]

12. $2-5+29-89+\ldots\ldots\ldots\ldots$ [नागपुर, 1949]

13. आवर्ती श्रेणी

$$1+6+40+288+\ldots$$

की सम्बन्ध-मापनी, nवाँ पद और प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात करो।

[कलकत्ता आ०,1958]

14. उस आवर्ती श्रेणी का nवाँ पद ज्ञात करो जिसके प्रथम चार पद $1+2x+7x^2+20x^3$ हैं। इसके प्रथम n पदों के लिए योगफल भी ज्ञात करो जब कि $x=-1.$ (नागपुर, 1948)

15. दो श्रेणी

$$\sum_{0}^{\infty} a_n x^n \text{ और } \sum_{0}^{\infty} b_n x^n$$

की सम्बन्ध-मापनी क्रमशः $1+px+qx^2$ और $1+rx+Sx^2$ हैं। दिखाओ कि श्रेणी जिसका व्यापक पद $(a_n+b_n)x^n$ है एक आवर्ती श्रेणी है और उसकी सम्बन्ध-मापनी

$$1+(p+r)x+(q+s+pr)x^2+(qr+ps)x^3+qsx^4 \text{ है।}$$

अध्याय 8

वितत भिन्न

8·1· किसी

$$a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}} \qquad (1)$$

के समरूप व्यंजक को, जिसमें $a_1, b_2, a_2, b_3, \ldots$ कोई भी संख्या हैं, वितत भिन्न कहते हैं। इस अध्याय में हम केवल

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}} \qquad (2)$$

जाति की भिन्न का अध्ययन करगे। इसमें a_1 $a_2 \ldots$ धन पूर्ण संख्या हैं परन्तु a_1 शून्य भी हो सकती है। इस प्रकार की भिन्न को सरल वितत भिन्न कहते हैं और सरलता के लिए इसको

$$a_1 + \frac{1}{a_2+} \frac{1}{a_3+} \cdots \qquad (3)$$

की भाँति लिखते हैं।

जब भागफल $a_1, a_2, a_3, \ldots$ संख्या में परिमित होते हैं, तो वितत भिन्न को सांत और जब अपरिमित, तो वितत भिन्न को अनन्त कहते हैं।

सामान्य अंकगणतीय विधि से किसी सांत वितत भिन्न का मान निकालने के लिए भिन्न को दक्षिण वाह्य पद से वाम पक्ष की ओर (अथवा तल से उपरि दिशा की ओर) क्रम से सरल करते हैं। इस अध्याय में हमारा ध्येय वाम वाह्य पद (अथवा शिखर) से आरम्भ कर भिन्न के सन्निकटन प्राप्त करना एवं इन सन्निकटन के गुण का अध्ययन करना है।

इस प्रकार राशियाँ

$$a_1, a_1 + \frac{1}{a_2}, a_1 + \frac{1}{a_2+} \frac{1}{a_3}, \ldots , \qquad (4)$$

वितत भिन्न (3) की सन्निकटन हैं। इनको वितत भिन्न के प्रथम, द्वितीय, तृतीय .... अभिसृतक कहते हैं।

8·11. उदाहरण : *वितत भिन्न*

$$3+\frac{1}{4+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{4}$$

का मान ज्ञात करो और इसके क्रमिक अभिसृतक लिखो।

वितत भिन्न $=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}$,

$=3+\frac{1}{4+9/4}$,

$=3+4/40$,

$=129/40.$

प्रथम अभिसृतक $=3$;

द्वितीय ,, $=3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$;

तृतीय ,, $=3+\frac{1}{4+\frac{1}{2}}=3+\frac{2}{9}=\frac{29}{9}$;

और चतुर्थ ,, $=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}$,

$=\frac{129}{40}.$

8·2. साधारण भिन्न को सरल वितत भिन्न मे संरूपांतरित करना।

कल्पना करो कि m/n एक साधारण भिन्न है। m को n से भाग करो। यदि तब a_1 भागफल एवं p शेषफल हो, तो

$$\frac{m}{n}=a_1+\frac{p}{n}=a_1+\frac{1}{n/p}.$$

n को p से भाग करो और तब यदि a_2 भागफल और q शेषफल प्राप्त हो, तो

$$\frac{n}{p}=a_2+\frac{q}{p}=a_2+\frac{1}{p/q}.$$

अतः

$$\frac{m}{n}=a_1+\frac{1}{a_2+}\;\frac{1}{p/q}.$$

इसी प्रकार हम p को q से भाग कर भागफल a_3 और शेषफल r प्राप्त कर सकते हैं; इत्यादि-इत्यादि। इस भाँति

$$\frac{m}{n}=a_1+\frac{1}{a_2+}\;\frac{1}{a_3+}\cdots.$$

8·21. उदाहरण : (i) *भिन्न 129/40 को सरल वितत भिन्न मे अभिव्यक्त करो।*

$$\text{भिन्न}\ \frac{129}{40}=3+\frac{9}{40},$$

$$=3+\frac{1}{40/9},$$

$$=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9/4}}.$$

(ii) भिन्न 798/383 को वितत भिन्न में संरूपांतरित करो।

798 और 383 के महत्तम समापवर्तक निकालने की विधि से प्राप्त होता है:

```
383) 7 9 8 (2
     7 6 6
     -----
       32) 3 8 3 (11
           3 5 2
           -----
            3 1) 3 2 (1
                 3 1
                 ---
                  1) 3 1 (31
                     3 1
                     ---
                      ×
```

अथवा			
$a_2=11$	383	798	$2=a_1$
	·352	766	
$a_4=31$	31	32	$1=a_3$
	31	31	
	×	1	

अतः क्रमिक अभिसृतक 2, 11, 1, 31 और अतएव वितत भिन्न

$$2+\frac{1}{11+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{31}$$

है।

प्रश्नावली

निम्नलिखित वितत भिन्न के क्रमिक अभिसृतक ज्ञात करो:

1. $\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1}$.

2. $1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{5}$.

निम्नलिखित वितत भिन्नों का मान ज्ञात करो:

3. $2+\frac{1}{5+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{9+}\,\frac{1}{3}$.

4. $\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{2}$.

निम्नलिखित संख्याओं को वितत भिन्नो में संरूपांतरित करो:

5. $\frac{15}{38}$. 6. $\frac{217}{502}$. 7. $\frac{1189}{3927}$.

8. ·37. [आगरा, 1950] 9. ·3118. 10. 4·771.

8·3. अभिसृतक का एक गुण : *किसी सरल वितत भिन्न के अभिसृतक उससे एकान्तरतः कम और अधिक होते हैं।*

कल्पना करो कि

$$a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

सरल वितत भिन्न है, जिसमें परिकल्पना से, $a_1 a_2 a_3, \ldots\ldots$, धन पूर्ण संख्यायें हैं परन्तु a_1 शून्य भी हो सकती है।

प्रथम अभिसृतक a_1 वितत भिन्न (i) से कम है, क्योंकि हमने एक धन भाग

$$\frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \cdots\ \cdots\cdots$$

छोड़ दिया है।

द्वितीय अभिसृतक $a_1 + 1/a_2$ वितत भिन्न (1) से अधिक है क्योंकि हर a_2, धन भाग

$$\frac{1}{a_3 +} \frac{1}{a_4 +} \cdots\ \cdots\cdots,$$

के छोड़ने के कारण वितत भिन्न के हर से छोटा है।

तृतीय अभिसृतक $a_1 + 1/(a_2 + 1/a_3)$ वितत भिन्न (1) से कम है क्योंकि हर के एक भाग को छोड़ने के कारण $a_2 + 1/a_3$ बहुत अधिक है; इत्यादि।

अतएव प्रमेय प्रमाणित हो जाता है।

8·31. उपप्रमेह : यदि निर्दिष्ट भिन्न उचित भिन्न हो, तो $a_1 = 0$। ऐसी दशा में प्रथम अभिसृतक को शून्य मान लिया जाये, तो पूर्वगत प्रमेय से स्पष्ट है कि प्रत्येक साधारण भिन्न की सरल वितत भिन्न के विषम क्रम के समस्त अभिसृतक भिन्न से कम और सम क्रम के समस्त अभिसृतक भिन्न से अधिक होते हैं।

8.4. अभिसृतक विरचना : *किसी सरल वितत भिन्न के क्रमिक अभिसृतक विरचना का नियम ज्ञात करना :*

कल्पना करो कि वितत भिन्न

$$a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \frac{1}{a_4 +} \cdots\ \cdots$$

है। परिभाषा के अनुसार, इसके क्रमिक अभिसृतक

$$a_1, \ \frac{1 + a_1 a_2}{a_2}, \ \frac{a_3 (1 + a_1 a_2) + a_1}{a_3 a_2 + 1}, \ \cdots\cdots\cdots$$

हैं । यदि इन अभिसृतक के अंश को क्रमशः $p_1, p_2, p_3, \ldots$ और हर को क्रमशः $q_1, q_2, q_3, \ldots$ से सूचित करे, तो

$$p_3 = a_3 p_2 + p_1 \text{ और } q_3 = a_3 q_2 + q_1 .$$

इसी भाँति p_4 और q_4 को अभिव्यक्त कर सकते हैं।

अतः कल्पना करो कि

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} ,$$

और $$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} . \qquad (1)$$

तथा कल्पना करो कि यह सम्बन्ध n के किसी विशेष मान के लिए सत्य हैं; तो

$$n\text{वाँ अभिसृतक} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} .$$

स्पष्टतः $(n+1)$ वाँ अभिसृतक को nवाँ अभिसृतक में a_n के स्थान पर $a_n + 1/a_{n+1}$ रख कर प्राप्त कर सकते हैं। अतः

$$(n+1)\text{वाँ अभिसृतक} = \frac{(a_n + 1/a_{n+1})\, p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + 1/a_{n+1})\, q_{n-1} + q_{n-2}} ,$$

$$= \frac{a_{n+1}\,(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}\,(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} ,$$

$$= \frac{a_{n+1}\, p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}\, q_n + q_{n-1}} ; \ (1) \text{ से ।}$$

इससे विदित हैं कि $(n+1)$वाँ अभिसृतक भी nवाँ अभिसृतक की भाँति नियम (1) से निर्मित किया जा सकता है।

अतः यदि नियम (1) nवाँ अभिसृतक के लिए सत्य है, तो $(n+1)$वाँ अभिसृतक के लिए भी सत्य होगा। परन्तु हमने देखा है कि यह तृतीय अभिसृतक के लिए सत्य है; अतः गणितीय आगमन से यह n के प्रत्येक मान के लिए सत्य है।

8·5. क्रमिक अभिसृतक में सम्बन्ध :- *यदि किसी सरल वितत भिन्न का nवाँ अभिसृतक p_n/q_n हो, तो*

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n .$$

कल्पना करो कि सरल वितत भिन्न

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\;\frac{1}{a_3+}\cdots$$

है; तो

$$p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}$$

$$=(a_np_{n-1}+p_{n-2})\,q_{n-1}-(a_nq_{n-1}+q_{n-2})p_{n-1},$$

$$=(-)\,(p_{n-1}q_{n-2}-q_{n-1}\,p_{n-2}),$$

$$=(-)^2\,(p_{n-2}\,q_{n-3}-q_{n-2}\,p_{n-3}).$$

इस विधि के पुनरावृत अनुप्रयोग से

$$p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}=(-)^{n-2}\,(p_2q_1-q_2p_1)$$

प्राप्त होता है। परन्तु

$$p_1=a_1,\; q_1=1,\; p_2=a_1a_2+1,\; q_2=a_2,$$

और इस कारण

$$p_2q_1-q_2p_1=(a_1a_2+1)-a_1a_2=1=(-)^2.$$

अतः

$$p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}=(-)^n.$$

यह सूत्र उन सरल वितत भिन्न के लिए भी सत्य है जिनमें a_1 शून्य है, परन्तु शर्त यह है कि $1/a_2$ को द्वितीय अभिसृतक माना जाय।

उप-प्रमेय : 1. किसी सरल वितत भिन्न का प्रत्येक अभिसृतक अपने लघुतम पदों में होता है; अर्थात्, p_n और q_n में कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है क्योंकि, यदि ऐसा होता, तो उससे $p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}$; अर्थात्, संख्या 1 विभाजित हो जाती, जो कि सम्भव नहीं है।

2. nवाँ और $(n-1)$वाँ अभिसृतक में अंतर

$$=\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{p_nq_{n-1}\sim q_np_{n-1}}{q_nq_{n-1}},$$

$$=\frac{1}{q_nq_{n-1}}.$$

8.51. उदाहरण : यदि p_n/q_n वितत भिन्न

$$\frac{1}{a+}\;\frac{1}{a+}\;\frac{1}{a+}\cdots\cdots$$

का nवाँ अभिसृतक हो, तो दिखाओ कि

(i) $p^2_n + p^2_{n+1} = p_{n-1}\, p_{n+1} + p_n p_{n+2}$,

और (ii) $p_n = q_{n-1}$. [सागर, 1950]

इस श्रेणी के सब भागफल a हैं; इस कारण

$$p_{n+2} = a\, p_{n+1} + p_n ,$$

और $$p_{n-1} = p_{n+1} - ap_n.$$

अतः $$p_{n-1} p_{n+1} + p_n\, p_{n+2}$$
$$= (p_{n+1} - ap_n)\, p_{n+1} + (ap_{n+1} + p_n) p_n,$$
$$= p^2_{n+1} + p^2_n$$

(ii) $\dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{1}{a+}\ \dfrac{1}{a+}\ \dfrac{1}{a+}\ \dfrac{1}{a+} \ldots n$ भागफल तक,

और $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{1}{a+}\ \dfrac{1}{a+}\ \dfrac{1}{a+} \ldots (n-1)$ भागफल तक।

अतः $p_n/p_n = \dfrac{1}{a+}\ \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{q^{n-1}}{aq_{n-1} + p_{n-1}}$.

क्योंकि अभिसृतक अपने लघुतम पदों में होते हैं, इस कारण अंश बराबर होने चाहिए; अर्थात्

$$p_n = q_{n-1}.$$

(ii) *दिखाओ कि प्रथम और n^{th} अभिसृतक में संख्यात्मक अंतर*

$$= \frac{1}{q_1 q_2} - \frac{1}{q_2 q_3} + \frac{1}{q_3 q_4} + \ldots \frac{(-)^n}{q_{n-1} q_n}.$$

[इलाहाबाद, 1950]

हमें ज्ञात है कि

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-)^n}{q_n q_{n-1}}.$$

इसमें क्रमशः $n = 2, 3; 4, , \ldots, n$ रखने पर प्राप्त होता है

$$\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{q_1 q_2},$$

$$\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2} = -\frac{1}{q_2 q_3},$$

$$\frac{p_4}{q_4}-\frac{p_3}{q_3}=\frac{1}{q_3q_4},$$

....

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-)^n}{q_{n-1}q_n}.$$

अतएव योग लेने पर प्राप्त होता है

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{q_1q_2}-\frac{1}{q_2q_3}+\ldots+\frac{(-)^n}{q_{n-1}q_n}.$$

प्रश्नावली

यदि p_n/q_n वितत भिन्न

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\;\frac{1}{a_3+}\;\cdots\;\frac{1}{a_n+}\;\cdots,$$

का nवाँ अभिसृतक हो, तो दिखाओ कि

1. $\dfrac{p_n}{p_{n-1}}=a_n+\dfrac{1}{a_{n-1}+}\;\dfrac{1}{a_{n-2}+},\cdots\dfrac{1}{a_2+}\;\dfrac{1}{a_1}.$

[गोरखपुर, 1959]

2. $\dfrac{q_n}{q_{n-1}}=a_n+\dfrac{1}{a_{n-1}+}\;\dfrac{1}{a_{n-2}+}\cdots\dfrac{1}{a_2}.$

[गोरखपुर, 1959]

3. $\dfrac{p_{n+1}-p_{n-1}}{q_{n+1}-q_{n-1}}=\dfrac{p_n}{q_n}.$

4. $\left(\dfrac{p_{n+2}}{p_n}-1\right)\left(1-\dfrac{p_{n-1}}{p_{n+1}}\right)=\left(\dfrac{q_{n+2}}{q_n}-1\right)\left(1-\dfrac{q_{n-1}}{q_{n+1}}\right).$

[सागर, 1957]

5. $p_n\,q_{n-2}-q_n\,p_{n-2}=(-)^{n-2}\,(a_n\,a_{n-1}+1).$

6. $(p_nq_n+p_{n-1}\,q_{n-1})-(p_{n-2}\,q_n+p_{n-1}\,q_{n+1})$
$=(a_n-a_{n+1})\,p_{n-1}\,q_n.$

यदि वितत भिन्न

$$\frac{1}{a+}\;\frac{1}{b+}\;\frac{1}{a+}\;\frac{1}{b+}\;\cdots\cdots$$

का n^{th} अभिसृतक p_n/q_n हो, तो सिद्ध करो:

7. $q_{2n} = p_{2n+1}$ [यू० पी० सी० एस०, 1955]

8. $q_{2n-1} = \frac{a}{b} p_{2n}$

9. $p_{2n+2} = p_{2n} + bq_{2n}$.

10. $q_{2n+2} = ap_{2n} + (ab+1)q_{2n}$ [आगरा, 1948]

8·6. आंशिक और पूर्ण भागफल : कल्पना करो कि किसी सरल वितत भिन्न

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+} \cdots \frac{1}{a_n+}\ \frac{1}{a_{n+1}+} \cdots\cdots; \qquad (1)$$

का nवाँ अभिसृतक p_n/q_n है; तो

$$\frac{p_n}{q_n} = a_1 + \frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+} \cdots \frac{1}{a_n}.$$

स्पष्टतया, वितत भिन्न (1) को p_n/q_n में a_n के स्थान पर

$$k = a_n + \frac{1}{a_{n+1}+}\ \frac{1}{a_{n+2}+} \cdots \qquad (2)$$

प्रतिस्थापित करने से प्राप्त कर सकते हैं। इस कारण सामान्यतः a_n को nवाँ आंशिक भागफल तथा k को nवाँ पूर्ण भागफल कहते हैं।

हमको ज्ञात है कि

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}};$$

अतः, सरल वितत भिन्न

$$x = \frac{kp_{n-1} + p_{n-2}}{kq_{n-1} + q_{n-2}}.$$

अब हम इन भागफल से सम्बंधित तीन प्रमेय सिद्ध करगे।

8·61. प्रमेय 1 : *प्रत्येक अभिसृतक पूर्वगत अभिसृतक की अपेक्षा सरल वितत भिन्न के मान का निकटतर सन्निकटन होता है।*

कल्पना करो कि सरल वितत भिन्न का मान x है और p_n/q_n और p_{n+1}/q_{n+1} इसके दो क्रमिक अभिसृतक हैं; तो अनुच्छेद 8.6 से

$$x = \frac{kp_{n+1} + p_n}{kq_{n+1} + q_n},$$

जिसमें k वितत भिन्न का $(n+2)$वाँ पूर्ण भागफल है ।

$$\therefore x \sim \frac{p_n}{q_n} = \frac{(kp_{n+1} + p_n) q_n \sim (kq_{n+1} + q_n) p_n}{(kq_{n+1} + q_n) q_n},$$

$$= \frac{k}{(kq_{n+1} + q_n) q_n}, \qquad (1)$$

और $x \sim \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \dfrac{(k\, p_{n+1} + p_n) q_{n+1} \sim (k\, q_{n+1} + q_n) p_{n+1}}{(kp_{n+1} + q_n) q_{n+1}}$.

$$= \frac{1}{(kq_{n+1} + q_n) q_{n+1}}. \qquad (2)$$

स्पष्टतया, (2) से (1) अधिक है क्योंकि $k > 1$ और $q_n < q_{n+1}$ । अतः p_{n+1}/q_{n+1} पूर्वगत अभिसृतक p_n/q_n की अपेक्षा x का निकटतर सन्निकटन है।

उप-प्रमेय : 1. *प्रत्येक अभिसृतक किसी भी पूर्वगत अभिसृतक की अपेक्षा सरल वितत भिन्न के मान का निकटतर सन्निकटन होता है ।*

2. (i) *विषय क्रम के अभिसृतक के मान स्थिरता से बढ़ते हैं, परन्तु सरल वितत भिन्न से सदैव कम रहते हैं ।*

(ii) *सम क्रम के अभिसृतक के मान स्थिरता से घटते है, परन्तु सरल वितत भिन्न से सदैव कम रहते हैं ।*

8·62. प्रमेय : 2. *किसी वितत भिन्न x के स्थान पर nवां अभिसृतक p_n/q_n लेने पर त्रुटि-सीमा असमता*

$$\frac{1}{q_n(q_{n+1} + q_n)} < x \sim \frac{p_n}{q_n} < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

से प्राप्त होती है

अनुच्छेद 8.61 से संख्यात्मक त्रुटि

$$x \sim \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{q_n(q_{n+1} + q_n/k)}. \qquad (1)$$

परन्तु $q_n/k < q_n$ क्योंकि $k > 1$ । अतः त्रुटि

$$\frac{1}{q_n(q_{n+1}+q_n)} \tag{2}$$

से अधिक है।

पुनः, (1) से त्रुटि

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}}, \tag{3}$$

से कम है।

अतएव प्रमेय प्रमाणित हो जाता है।

उपप्रमेय : (3) से स्पष्ट है कि त्रुटि

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{1}{q_n(a_{n+1}q_n + q_{n-1})}$$

से और इस कारण

$$\frac{1}{a_{n+1}q^2_n}$$

से कम है। अतएव जब a_{n+1} बड़ा होगा, तो त्रुटि कम होगी।

अतः यदि कोई भागफल बहुत अधिक बड़ा हो तो इसका निकटतम पूर्वगत अभिसृतक वितत भिन्न का पर्याप्त निकट सन्निकटन होता है।

8.63. प्रमेय 3 : *कोई अभिसृतक अपने हर से कम हर की किसी अन्य भिन्न की अपेक्षा सरल वितत भिन्न का निकटतर सान्निकटन होता है।*

कल्पना करो कि p_n/q_n, p_{n-1}/q_{n-1} दो क्रमिक अभिसृतक हैं और α/β एक ऐसी भिन्न है जो कि न्यूनतम पदों में है तथा जिसमें $\beta < q_n$ और α, β धनात्मक पूर्ण संख्याएं हैं; तो हमें सिद्ध करना है कि

$$x \sim \frac{p_n}{q_n} < x \sim \frac{\alpha}{\beta}. \tag{1}$$

यदि सम्भव है तो कल्पना करो कि

$$x \sim \frac{p_n}{q_n} > x \sim \frac{\alpha}{\beta}; \tag{2}$$

तो अनुच्छेद 8.61 से

$$x \sim \frac{\alpha}{\beta} < x \sim \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

परन्तु अनुच्छेद 8.3 से

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < x < \frac{p_n}{q_n} ;$$

इस कारण

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_n}{q_n} .$$

अतः

$$\frac{\alpha}{\beta} \sim \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{p_n}{q_n} \sim \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n q_{n-1} \sim p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}} = \frac{1}{q_n q_{n-1}},$$

अथवा

$$\alpha q_{n-1} \sim \beta p_{n-1} < \frac{\beta}{q_n}, \tag{3}$$

परन्तु α, $\beta, p_{n-1}\, q_{n-1}$ पूर्ण संख्याएं हैं और β/q_n एक भिन्न है। अतएव (3) असम्भव है और इस कारण कल्पना (2) सत्य नहीं है।

अतः अभिसृतक p_r/q_n भिन्न α/β की अपेक्षा x का निकटतर सन्निकटन है।

8 64. उदाहरण (i) : *एक मीटर 39.37079 इंच के बराबर है। वितत भिन्न के सिद्धांत द्वारा दिखाओ कि 32 मीटर 35 गज के बराबर है।*

[आगरा, 57]

$$1 \text{ मीटर} = 39.37079 \text{ इंच} = \frac{3937079}{3600000} \text{ गज।}$$

संख्याओं 3937079 और 3600000 का लघुतम समापवर्तक लेने पर क्रमिक भागफल 1, 10, 1, 2, 8, ... प्राप्त होते हैं; अतएव

$$1 \text{ मीटर} = 1 + \frac{1}{10+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{8+} \cdots \text{ गज।}$$

इस वितत भिन्न के क्रमिक अभिसृतक 1, 11/10, 12/11, 35/32 इत्यादि हैं। अतः

$$1 \text{ मीटर} = \frac{35}{32} \text{ गज सन्निकटतः} ,$$

32 मीटर=35 गज सन्निकटतः।

(ii) *वितत भिन्न*

$$1+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{7+}\,\frac{1}{9+}\,\frac{1}{11+}\cdots$$

का वह सन्निकटन के ज्ञात करो जिसके और वितत भिन्न के मान में 0.0001 *से कम अंतर हो।* [इलाहाबाद, 1949]

वितत भिन्न के क्रमिक अभिसृतक

$$\frac{1}{1},\ \frac{4}{3},\ \frac{21}{16},\ \frac{151}{115}\cdots$$

हैं। अतः यदि भिन्न के स्थान पर अभिसृतक 151/115 ले, तो त्रुटि $1/115^2$ अथवा 0.0001 से कम होगी।

अतः वांछित सन्निकटन 151/115 है।

प्रश्नावली

1. यदि $\sqrt{8}=2+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\cdots$, तो दिखाओ कि वितत भिन्न के स्थान पर 6वाँ अभिसृतक लेने पर त्रुटि 0.0002 से कम होगी।

2. यदि $\sqrt{11}=3+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{6+}\cdots$, तो दिखाओ कि वितत भिन्न के स्थान पर 4वाँ अभिसृतक लेने पर त्रुटि 0.00005 से कम होगी।

3. $\sqrt{23}$ का एक सन्निकटन ज्ञात करो जिसकी त्रुटि सीमा $1/(191)^2$ और $1/\{2(240)^2\}$ हैं।

4. वह अभिसृतक ज्ञात करो जिसका हर 1000 से अधिक न हो और जो कि वितत भिन्न

$$\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{4+}\cdots$$

का निकटतम प्रतिनिधि हो। दिखाओ कि इस मान को लेने में त्रुटि $1/\{2\times10^{-6}\}$ से कम और $1/\{4\times10^{-5}\}$ से अधिक होगी।

[अन्नामलाई, 1949]

5. यदि $\pi = 3+\frac{1}{7+}\ \frac{1}{15+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{25+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{7+}\ \cdots$,

तो साधारण भिन्न के रूप में π का एक सन्निकटन ज्ञात करो जिसका मान वास्तविक से 0.0001 मान से कम से अधिक होगा। [इलाहाबाद, 1959]

8·7. आवर्ती वितत भिन्न : यदि किसी अनंत वितत भिन्न में संख्या में परिमित कुछ भागफलों के पश्चात् एक नियत संख्या के भागफल की बारम्बार पुनरावृत्ति हो, तो भिन्न को आवर्ती वितत भिन्न कहते हैं। उदाहरणार्थ,

$$a+\frac{1}{a+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{a+}\ \cdots, \tag{1}$$

एक आवर्ती वितत भिन्न है, जिसमें भागफल a बारंबार पुनरावृत्त होता है।

कल्पना करो कि इसका मान x है, तो

$$x=a+\frac{1}{x},$$

अथवा $$x^2-ax-1=0,$$

अथवा $$x=\tfrac{1}{2}\{a+\sqrt{(a^2+4)}\},$$

क्योंकि ऋणात्मक मूल का मान अग्राह्य है।

यदि (1) का nवाँ अभिसृतक p_n/q_n हो, तो n के प्रत्येक मान के लिए जो दो से अधिक हो

$$p_n=ap_{n-1}+p_{n-2},$$

और $$q_n=aq_{n-1}+q_{n-2}. \tag{2}$$

यह दो संबंध-मापनी हैं जिनसे पता चलता है कि Σp_n और Σq_n दो आवर्ती श्रेणी हैं। इस गुण की सहायता से (1) का n^{th} अभिसृतक ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण ; (i) *आवर्ती वितत भिन्न*

$$1+\frac{1}{2+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{3+}\ \cdots$$

का मान ज्ञात करो। [राजस्थान, 1958]

यदि भिन्न को x से सूचित कर, तो

$$x-1=\frac{1}{2+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{3+}\ \cdots,$$

$$=\frac{1}{2+}\frac{1}{3+(x-1)},$$

$$=\frac{1}{2+1/(x+2)},$$

$$=\frac{x+2}{2(x+2)+1}.$$

अतः $(x-1)(2x+5)=x+2,$

अथवा $2x^2+2x-7 \quad =0,$

अथवा $x=\frac{1}{2}(\sqrt{15}-1),$

क्योंकि ऋणात्मक मान अग्राह्य है।

(ii) *वितत भिन्न*

$$2+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots$$

का अभिसृतक ज्ञात करो।

कल्पना करो कि nवाँ अभिसृतक p_n/q_n है; तो $\Sigma p_n x^n$ और $\Sigma q_n x^n$ दोनों आवर्ती श्रेणी हैं, क्योंकि

$$p_n-2p_{n-1}-p_{n-2}=0, \tag{1}$$

और

$$q_n-2q_{n-1}-q_{n-2}=0. \tag{2}$$

स्पष्टतया वितत भिन्न के प्रथम दो अभिसृतक 2/1 और 5/2 हैं, अतएव $p_1=2, p_2=5, q_1=1, q_2=2$। अब यदि $\Sigma p_n x^n$ के जनक-फलन को S से सूचित किया जाये, तो

$$S=p_1x+p_2x^2+p_3x^3+\ \dots\dots\dots,$$

$$-2xS=\ -2p_1x^2-2p_2x^3-\dots\dots\dots,$$

$$-x^2S=\qquad\qquad -p_1x^3-\dots\dots\dots,$$

योग लेकर x से भाग करने पर प्राप्त होता है

$$S=\frac{p_1x+(p_2-2p_1)x^2}{1-2x-x^2},$$

$$=\frac{2x+x^2}{1-2x-x^2},$$

$$=-1+\frac{1}{1-2x-x^2},$$

$$=-1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{\sqrt{2}-1}{1+(\sqrt{2}-1)x}+\frac{\sqrt{2}+1}{1-(\sqrt{2}+1)x}\right\}. \quad (3)$$

अतः

p_n = संबंध (3) में x^n का गुणांक,

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{(2-1)(-)^n(\sqrt{2}-1)^n+(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)^n\right\},$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{(\sqrt{2}+1)^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}\right\}.$$

इसी भाँति

$$q_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{(\sqrt{2}+1)^n-(1-\sqrt{2})^n\right\}$$

भाग करने पर प्राप्त होता है

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{\{(\sqrt{2}+1)^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}\}}{\{(\sqrt{2}+1)^n-(1-\sqrt{2})^n\}}.$$

8·8. द्विघात करणी का संरूपांतरण : द्विघात करणी तथा अपरिमेय संख्याओं को सरल वितत श्रेणी में सरलता से संरूपांतरित कर सकते हैं। इसकी विधि, जो कि सार-भूत रूप में अनुच्छेद 8.2 के ही समान है, निम्नवर्ती उदाहरण से स्पष्ट हो जाएगी।

8·81. उदाहरण: *करणी $\sqrt{19}$ को वितत भिन्न में संरूपांतरित करो ।*

$$\sqrt{19}=4+(\sqrt{19}-4)=4+3/(\sqrt{19}+4); \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{19}+4}{3}=2+(\sqrt{19}-2)/3=2+5/(\sqrt{19}+2); \quad (2)$$

$$(\sqrt{19}+2)/5=1+(\sqrt{19}-3)/5=1+2/(\sqrt{19}+3); \quad (3)$$

$$(\sqrt{19}+3)/2=3+(\sqrt{19}-3)/2=3+5/(\sqrt{19}+3); \quad (4)$$

$$(\sqrt{19}+3)/5=1+(\sqrt{19}-2)/5=1+3/(\sqrt{19}+2); \quad (5)$$

$$(\sqrt{19}+2)/3=2+(\sqrt{19}-4)/3=2+1/(\sqrt{19}+4); \quad (6)$$

$$(\sqrt{19}+4)=8+(\sqrt{19}-4)=8+3/(\sqrt{19}+4). \quad (7)$$

इस प्रकार की कृति से (2) से (7) तक के पद बारंबार पुनरावृत्त होते हैं। अतएव

$$\sqrt{19}=4+\frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{8+}\cdots\cdots,$$

जिसमें अंतिम 6 भागफल बारम्बार पुनरावृत्त होते हैं।

प्रश्नावली

निम्नलिखित आवर्ती वितत श्रेणी का मान ज्ञात करो:

1. $\frac{1}{1+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{3+}\cdots\cdots.$

2. $2+\frac{1}{1+}\ \frac{1}{4+}\ \frac{1}{4+}\cdots\cdots.$

3. $\frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{4+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{4}\cdots\cdots.$

4. $\frac{1}{3+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\cdots\cdots.$ [राजस्थान, 1950]

निम्नलिखित करणी का वितत भिन्न में संरूपांतरण करो:

5. $\sqrt{2}$. [आगरा, 1944]
6. $\sqrt{7}$. [आगरा, 1955]
7. $\sqrt{10}$. [आगरा, 1949]
8. $\sqrt{14}$. [नागपुर, 1933]
9. $\sqrt{(a^2+1)}$ को वितत भिन्न के रूप में अभिव्यक्त करो। [आई० सी० एस०, 1941]

10. समीकरण $x^2-5x+3=0$ के प्रत्येक मूल को वितत श्रेणी में अभिव्यक्त करो।

8·9. सामान्य वितत श्रेणी : अनुच्छेद 8.1 में सामान्य वितत श्रेणी की परिभाषा दी गई थी। इसको सरलता के लिए

$$a_1+\frac{b_2}{a_2+}\ \frac{b_3}{a_3+}\ \frac{b_4}{a_4+}\cdots\cdots.$$

के रूप में लिख सकते हैं। इसके क्रमिक अभिसृतक

$$a_1,\ a_1+\frac{b_2}{a_2},\ a_1+\frac{b_2}{a_2+}\ \frac{b_3}{a_3},\ \ldots$$

और nवाँ अभिसृतक p_n/q_n का विरचना का नियम

$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}\ ,$$
$$q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}$$

है। इसको अनुच्छेद 8.4 की भाँति ही सिद्ध कर सकते हैं परंतु सरल वितत की भाँति p_n/q_n का लघुतम पदों में होना आवश्यक नहीं है।

8·91. उदाहरण : *दिखाओ कि*

$$2-\frac{1}{2-}\ \frac{1}{2-}\ \frac{1}{2-}\ \ldots\ldots\ldots,$$

का nवाँ अभिसृतक $(n+1)/n$ है। [कलकत्ता आ०, 1950]

कल्पना करो कि वितत श्रेणी का nवाँ अभिसृतक p_n/q_n है; तो

$$\frac{p_1}{q_1}=2;\ \frac{p_2}{q_2}=\tfrac{3}{2}=2-\tfrac{1}{2}\ ;\ \frac{p_3}{q_3}=\tfrac{4}{3}=2-\tfrac{2}{3}\ ;$$

इत्यादि।

हम देखते हैं कि प्रथम तीन अभिसृतक

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{n+1}{n}=2-\frac{n-1}{n} \tag{1}$$

से प्राप्त किए जा सकते हैं। यदि यह n के किसी विशेष मान तक के लिए सत्य है; तो

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=2-\frac{1}{2-}\ \frac{1}{2-}\ \frac{1}{2-}\ldots,\ (n+1)\ \text{भागफलों तक},$$

$$=2-\left[\frac{1}{2-}\ \frac{1}{2-}\ \frac{1}{2-}\ldots n\ \text{भाग फलों तक},\right],$$

$$=2-\frac{1}{2-\dfrac{n-1}{n}}=2-\frac{n}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}.$$

यह (1) के रूप का है। अतः यदि (1) nवाँ अभिसृतक के लिए सत्य है, तो $(n+1)$वाँ अभिसृतक के लिए भी सत्य होगा। परन्तु हमने देखा है कि यह तृतीय

अभिसृतक के लिए सत्य है। अतः गणितीय आगमन से यह समस्त अनुवर्ती अभिसृतक के लिए सत्य है।]

विविध प्रश्नावली

1. भिन्न $\frac{763}{396}$ को एक वितत भिन्न के रूप में अभिव्यक्त करो और इस भाँति x और y का वह मान ज्ञात करो जो समीकरण

$$396x - 763y = 12$$

को संतुष्ट करता है। [आगरा, 1952]

2. भिन्न $\frac{157}{68}$ को एक सरल वितत भिन्न में अभिव्यक्त करो जिसमें भागफल की संख्या विषम है और इस प्रकार x और y का वह मान ज्ञात करो जो समीकरण

$$68x - 157y = 1$$

को संतुष्ट करता है। [आगरा, 1958]

3. यदि $(n^4+n^2-1)/(n^3+n^2+n+1)$ को एक वितत भिन्न में संरूपांतरित किया जाये, तो दिखाओ कि भागफल एकांतरतः $n-1$ और $n+1$ हैं, और क्रमिक अभिसृतक ज्ञात करो। [सागर, 1948]

4. भिन्न $\dfrac{a^3+6a^2+13a+10}{a^4+6a^3+14a^2+15a+7}$ को एक वितत भिन्न में अभिव्यक्त करो और तृतीय अभिसृतक ज्ञात करो। [नागपुर, 1951]

5. भिन्न $(x^2+x+1)/(x^2+1)$ को एक सरल वितत भिन्न में अभिव्यक्त कर इस प्रकार के दो बहुपद A और B ज्ञात करो कि

$$A(x^2+x+1) - B(x^2+1) = \pm 1.$$

[आगरा, 1956]

6. दो समान लम्बाई के पैमानों को क्रमशः 162 और 209 बराबर भागों में विभाजित किया है। यदि उनके शून्य बिन्दु संपाती हों, तो दिखाओ कि एक का 31वाँ भाग और दूसरे का 40वाँ भाग निकटतम हैं। [नागपुर, 1954]

7. एक चान्द्र-मास में 29.53 दिन और सायन-वर्ष में 365.24 दिन होते हैं। क्रमिक अभिसृतक बनाकर दिखाओ कि 8 सायन-वर्ष में लगभग 99 चान्द्र-मास अथवा 235 चान्द्र-मास में 19 सायन-वर्ष होते हैं। [राजस्थान, 1961]

8. दिखाओ कि

$$a\left(x_1 + \frac{1}{ax_2+}\ \frac{1}{x_3+}\ \frac{1}{ax_4+}\ \ldots\ 2n \text{ भागफल तक}\right)$$

$$= ax_1 + \frac{1}{x_2+}\ \frac{1}{ax_3+}\ \frac{1}{x_4+}\ \ldots\ 2n \text{ भागफल तक ।}$$

9. यदि वितत भिन्न

$$\frac{1}{a_1+}\ \frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\ \ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_4+}\ \ldots\ldots.$$

और $$\frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_4+}\ \frac{1}{a_5+}\ \ldots\ldots,$$

के nवें, $(n-1)$ वें, $(n-2)$ वें, अभिसृतक क्रमशः M/N, P/Q, R/S हों, तो दिखाओ कि

$$M = a_2P + R,$$

$$N = (a_1a_2 + 1)P + a_1R.$$

[विक्रम, 1962]

10. यदि किसी वितत भिन्न का nवाँ अभिसृतक p_n/q_n और a_n संगत भागफल हो, तो दिखाओ कि

$$p_{n+2}\, q_{n-2} \sim p_{n-2}\, q_{n+2} = a_{n+2}\, a_{n+1}\, a_n + a_{n+2} + a_n.$$

[जबलपुर, 1962]

11. वितत भिन्न

$$a + \frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\ \ldots\ldots\ldots$$

में दिखाओ कि

(i) $p_{2n} - (ab+2)\, p_{2n-2} + p_{2n-4} = 0,$

(ii) $q_{2n} - (ab+2)\, q_{2n-2} + q_{2n-4} = 0.$

[इलाहाबाद, 1954]

12. यदि p_n/q_n वितत भिन्न

$$\frac{1}{a+}\;\frac{1}{b+}\;\frac{1}{c+}\;\frac{1}{a+}\;\frac{1}{b+}\;\frac{1}{c+}\;\cdots\cdots,$$

का nवाँ अभिसृतक हो, तो दिखाओ कि

$$p_{3n+3}=bp_{3n}+(bc+1)\,q_{3n}.$$

13. यदि संकतनों के सामान्य अर्थ हों, तो सिद्ध करो कि

(i) $$\frac{p_n^2+q_n^2}{p^2_{n-2}+q^2_{n-2}}=\frac{(p_n\,p_{n-1}+q_n\;q_{n-1})^2+1}{(p_{n-1}\;p_{n-2}+q_{n-1}\;q_{n-2})^2+1},$$

(ii) $$(p_n^2-q_n^2)\;(p^2_{n-1}-q^2_{n-1})$$
$$=(p_n\;p_{n-1}-q_n\;q_{n-1})^2-1.$$

[आन्ध्र, 1941]

14. यदि p_n/q_n और p_{n-1}/q_{n-1} भिन्न

$$\frac{1}{a+}\;\frac{1}{b+}\;\frac{1}{c+}\cdots\frac{1}{k+}\;\frac{1}{l}$$

के अंतिम एवं अंतिम से एक पूर्वगत अभिसृतक हों, तो दिखाओ कि

$$\frac{1}{a+}\;\frac{1}{b+}\;\frac{1}{c+}\cdots\frac{1}{k+}\;\frac{1}{l+}\;\frac{1}{a+}\;\frac{1}{b+}\;\frac{1}{c+}\cdots\frac{1}{k+}\;\frac{1}{l}$$
$$=\frac{p_nq_n+p_nq_{n-1}}{q_n^2+p_nq_{n-1}}.$$

[नागपुर, 1949]

nवाँ अभिसृतक ज्ञात करो:

15. $\frac{1}{2-}\;\frac{1}{2-}\;\frac{1}{2-}\cdots\cdots.$ [वाराणसी, 1949]

16. $\frac{1}{3+}\;\frac{1}{3+}\;\frac{1}{3+}\cdots\cdots.$ [इलाहाबाद, 1953]

17. दिखाओ कि भिन्न

$$1+\frac{1}{2+}\;\frac{1}{6+}\;\frac{1}{2+}\;\frac{1}{6+}\cdots\cdots,$$

भिन्न

$$\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\cdots\cdots,$$

को दूनी है। [आगरा, 1962]

18. यदि $x = a + \frac{1}{b+}\,\frac{1}{z+}\,\frac{1}{b+}\,\frac{1}{a+}\,\cdots,$

और $$y = b + \frac{1}{a+}\,\frac{1}{b+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{1}{b+}\,\cdots\cdots,$$

तो सिद्ध करो कि

$$bx = ay.$$ [इलाहाबाद, 1957]

19. यदि $\frac{1}{a+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{1}{a+}\cdots$

का nवाँ अभिसृतक p_n/q_n हो, तो दिखाओ कि

$$\frac{x}{1-ax-x^2} \text{ और } \frac{ax+x^2}{1-ax-x^2}$$

के विस्तार में x^n के गुणांक क्रमशः p_n और q_n हैं।

अतएव दिखाओ कि

$$p_n = q_{n-1} = (\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta),$$

जब कि α, β समीकरण

$$t^2 - at - 1 = 0.$$

के मूल हैं। [इलाहाबाद, 1952]

20. यदि किसी वितत भिन्न x के दो क्रमिक अभिसृतक p/q और p'/q' हों, तो दिखाओ कि $p/q >$ अथवा $< p'/q'$ के अनुसार $pp'/qq' >$ अथवा $< x^2$.

[इलाहाबाद, 1949]

अध्याय 9

आव्यूह की परिभाषा एवं प्रधान क्रियाएँ

9·1. उच्च गणित में कुछ ऐसे एक घात रूपान्तरण प्राप्त होते हैं जिनमें कि अज्ञात राशियों की संख्या समीकरणों का संख्या से अधिक होती है। उदाहरण के रूप में संदर्श-रेखण के प्रश्नों में त्रिविमितीय वस्तु को द्विविमितीय कागज पर प्रदर्शित करने की आवश्यकता हो सकती है। ऐसी दशा में वस्तु के किसी निर्दिष्ट विन्दु के तीन निर्देशांक होंगे, कागज पर निरूपक विन्दु के दो निर्देशांक होंगे और बीजतः निरूपण को निम्न प्रकार के समीकरणों क समुच्चय से अभिव्यक्त करगं :

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

जिसमें कि एक समतल का विन्दु (y_1, y_2) आकाश के विन्दु (x_1, x_2, x_3) का संगत है।

सामान्यतः, समीकरणों का समुच्चय

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = y_m \end{array}\right\}$$

एक व्यापक एक घात रूपांतरण है, जो कि m चर राशि $y_1, y_2, \ldots, y_m$ को n चर राशि $x_1, x_2, \ldots, x_n$ के एक घात फलन में अभिव्यक्त करता है।

स्पष्टतया किसी प्रश्न के हल में (2) के समरूप रूपान्तरण का बारम्बार पूर्णरूपेण लिखना अति कष्टकारक होता है। इस कारण केलॅ ने समीकरण के समुच्चय (2) को अभिव्यक्त करने के लिए आकुंचित संकेतन

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ y_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

का गणित शास्त्र में प्रवेश किया। समुच्चय (2) के स्थान पर इस प्रकार के 'अनासक्त गुणांक', के प्रयोग से परिश्रम में पर्याप्त बचत हो जाती है।

क्रमिक गुणांक की व्यवस्था (3) में यदि हम

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ . & . & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

को एक कारक मान ले जिसकी

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (5)$$

पर क्रिया से समुच्चय (2) के समीकरण प्राप्त हो जाते हैं, तो इन कारक का एक नवीन बीजगणित निर्माण करना सम्भव हो सकेगा। केलै तथा अन्य गणितज्ञों ने (4) और (5) के समरूप कारक को आव्यूह कहा।

9·2. परिभाषा : अनासक्त गुणांक a_{ij} की

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

के रूप की सारिणी को, जिसमें m पंक्ति तथा n स्तम्भ होते हैं, ***$m \times n$ क्रम का आव्यूह*** कहते हैं। इसको संक्षिप्त रूप में $[a_{ij}]$ अथवा A से निरूपित करते हैं।

a_{ij} संख्याओं को आव्यूह के ***अवयव अथवा रचक*** कहते हैं। कोई विशेष a_{ij} संख्या iवें पंक्ति और jवें स्तम्भ का रचक होती है।

किसी आव्यूह A में से कुछ पंक्ति अथवा स्तम्भ अथवा दोनों को निकाल देने पर शेष रचक की सारिणी से रचित आव्यूह को आव्यूह A का ***उप-आव्यूह*** कहते हैं।

यदि किसी आव्यूह में पंक्तियों एवं स्तम्भों की संख्या समान हो, तो उसको ***वर्ग आव्यूह*** कहते हैं। उस वर्ग आव्यूह को, जिसके अविकर्ण रचक शून्य होते हैं, ***विकर्ण-आव्यूह*** कहते हैं। समान रचकों का विकर्ण-आव्यूह ***आदिश-आव्यूह*** कहलाता है।

यदि किसी n क्रम के वर्ग आव्यूह के अग्रग विकर्ण के रचक एक और शेष रचक शून्य हों, तो उस वर्ग आव्यूह को n क्रम का **एकक आव्यूह** कहते हैं। इसको सामान्यतः I से निरूपित करते हैं। उदाहरणार्थ,

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

एकक आव्यूह है।

यह सरलता से सत्यापन कर सकते हैं कि एक $m \times 1$ क्रम का आव्यूह **स्तम्भ-आव्यूह** है।

इसी भाँति $1 \times m$ क्रम के आव्यूह को **पंक्ति-आव्यूह** अथवा पंक्ति-सदिश कहते हैं। उदाहरणार्थ,

$$[\, x_1.\ x_2, \ldots, x_m \,]$$

एक $1 \times m$ क्रम का पंक्ति-आव्यूह है।

सामान्यतः स्थान की बचत के लिए हम दोनों ही प्रकार के आव्यूह को क्षैतिज-संरेखण में लिखते हैं परन्तु अंतर के लिए स्तम्भ-आव्यूह को सूचित करने के लिए धनु कोष्ठक और पंक्ति-आव्यूह को सूचित करने के लिए गुरु-कोष्ठक का प्रयोग करते हैं। उदाहरणार्थ,

$$\{\, y_1, y_2, \ldots, y_m \,\}$$

स्तम्भ-आव्यूह और

$$[\, x_1, x_2, \ldots, x_m \,]$$

पंक्ति-आव्यूह को निरूपित करता है।

9·3. आव्यूह योग : एक घात रूपान्तरण के निम्नलिखित दो समुच्चय पर विचार करो :

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

और

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ z_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_3 + b_{23}x_3 \end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

यदि दो चर राशि w_1 और w_2 इस प्रकार की हों कि

$$w_1 = y_1 + z_1\ ;\ w_2 = y_2 + z_2\ ,$$

तो स्पष्टतया

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= (a_{11} + b_{11})x_1 + (a_{12} + b_{12})x_2 + (a_{13} + b_{13})x_3 \\ w_2 &= (a_{21} + b_{21})x_1 + (a_{22} + b_{22})x_2 + (a_{23} + b_{23})x_3 \end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

w_1 और w_2 का मान ज्ञात करने के लिए हमने केवल (1) और (2) में x_1, x_2, x_3 के गुणांकों को जोड़ लिया है। इससे यह अनुमान लगाया जा सकता है कि यदि

$$A \equiv [a_{ij}] \text{ और } B \equiv [b_{ij}]$$

एक ही क्रम के दो आव्यूह हों, तो उनका योगफल C और अन्तर D इस प्रकार के नए आव्यूह होंगे कि

$$C \equiv A + B \equiv [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [c_{ij}] \quad (4)$$

और $$D \equiv A - B \equiv [a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}] = [d_{ij}]; \quad (5)$$

अर्थात्, $m \times n$ क्रम के दो आव्यूह A और B का योगफल ज्ञात करने के लिए आव्यूह के संगत रचक का योगफल ज्ञात कर लेते हैं। इस भाँति प्राप्त योगफल 'योगफल आव्यूह' के संगत रचक होते हैं।

व्यापक रूप में

$$A + B + C + \ldots + K$$
$$= [a_{ij}] + [b_{ij}] + [c_{ij}] + \ldots + [k_{ij}],$$
$$= [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + \ldots\ldots + k_{ij}]. \quad (6)$$

यदि आव्यूह की संख्या r हो और $A = B = \ldots = K$, तो,

$$rA = r[a_{ij}] = [ra_{ij}] \quad (7)$$

यह सरलता से दिखाया जा सकता है कि धन पूर्ण राशि r के स्थान पर यदि कोई भी अदिश राशि हो, तो भी संबंध (7) सत्य रहेगा; अर्थात्, यदि γ कोई भी अदिश राशि है, तो

$$\lambda A = \lambda\ [a_{ij}] = [\lambda a_{ij}].$$

संबंध (6) और (8) से स्पष्ट है कि यदि $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ अदिश राशि हैं, तो संख्या में परिमित समान क्रम $m \times n$ के आव्यूह $A, B, \ldots, K$ के लिए

$$\alpha A + \beta B + \ldots + \lambda K = [\alpha a_{ij} + \beta b_{ij} + \ldots \lambda k_{ij}].$$

पुनः, यदि $A = B$, तो i और j के समस्त मान के लिए

$$a_{ij} = b_{ij}$$

और

$$\left.\begin{aligned} A - A &= [a_{ij}] - [a_{ij}] = [a_{ij} - a_{ij}] = [0] = 0. \\ [A] + [-A] &= [a_{ij}] + [-a_{ij}] = [a_{ij} - a_{ij}] = [0] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

अंतिम समीकरण एक ऋण आव्यूह $-A$ को परिभाषित करता है; अर्थात्, यदि

$$A = [a_{ij}],$$

तो

$$-A = -[a_{ij}] = [-a_{ij}].$$

9·31. उदाहरण : यदि

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{और } B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

तो $A+B$ और $A-B$ का मान ज्ञात करो।

यहाँ

$$A+B = \begin{bmatrix} 6+5 & 7+2 & 3+3 \\ 2+3 & 3+1 & 4+2 \\ 1+1 & -1+2 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 9 & 11 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix};$$

और

$$A-B = \begin{bmatrix} 6-5 & 7-2 & 8-3 \\ 2-3 & 3-1 & 4-2 \\ 1-1 & -1-2 & 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

प्रश्नावली

मान ज्ञात करो :

1. $[1 \;\; 2 \;\; 3] + [4 \;\; 5 \;\; 6]$.

2. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 4 & -1 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -6 & 5 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 3 \\ -8 & -4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 & 3 \\ -4 & -9 & 10 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 8 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 5 & -7 & -6 & -4 \end{bmatrix}$.

5. $2\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. यदि

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 10 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ और } B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 10 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

तो $A+B$ और $A-B$ का मान ज्ञात करो।

9·4. आव्यूह-गुणन : दो निर्दिष्ट आव्यूह के गुणन की विधि ज्ञात करने के लिए एक घात रूपान्तरण के दो समुच्चय

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

और

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \\ z_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 \end{array}\right\}, \qquad (2)$$

पर विचार करो।

समुच्चय (1) की सहायता में z_1, z_2, z_3, का रूपान्तरण करने पर समुच्चय

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = (b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21})x_1 + (b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22})x_2 + (b_{11}a_{13}+b_{12}a_{23})x_3 \\ z_2 = (b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21})x_1 + (b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22})x_2 + (b_{21}a_{13}+b_{22}a_{23})x_3 \\ z_3 = (b_{31}a_{11}+b_{32}a_{21})x_1 + (b_{31}a_{12}+b_{32}a_{22})x_2 + (b_{31}a_{13}+b_{32}a_{23})x_3 \end{array}\right\} (3)$$

प्राप्त होता है। समुच्चय (3) एक रूपान्तरित समुच्चय है जो कि z_1, z_2, z_3 को अनुलोमतः x_1, x_2, x_3 के पदों में अभिव्यक्त करता है।

यदि समुच्चय (3) के 'गुणांक आव्यूह' को C से तथा (1) और (2) के 'गुणांक आव्यूह' को A और B से सूचित करे, तो C को B और A का गुणनफल कहते हैं; अर्थात, यदि

$$C \equiv \begin{pmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22} & b_{11}a_{13}+b_{12}a_{23} \\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22} & b_{21}a_{13}+b_{22}a_{23} \\ b_{31}a_{11}+b_{32}a_{21} & b_{31}a_{12}+b_{32}a_{22} & b_{31}a_{13}+b_{32}a_{23} \end{pmatrix}$$

तथा

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \text{और } B \equiv \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix},$$

तो $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22} & b_{11}a_{11}+b_{12}a_{23} \\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22} & b_{21}a_{13}+b_{22}a_{23} \\ b_{31}a_{11}+b_{32}a_{21} & b_{31}a_{12}+b_{32}a_{22} & b_{31}a_{13}+b_{32}a_{23} \end{pmatrix}$$

संक्षिप्त रूप में

$$B\times A=C.$$

इस परिभाषा का विस्तार किसी भी क्रम के आव्यूह के लिए सरलता से किया जा सकता है। इस भाँति गुणन का सामान्य नियम निम्नलिखित है:

यदि दो आव्यूह B और A क्रमशः $m\times n$ और $n\times p$ क्रम के हों तो

$$BA=C\equiv[c_{ij}],$$

जिसमे C एक $m\times p$ क्रम का आव्यूह है जिसके c_{ij} रचक B की iवीं पंक्ति के रचक से A के jवें स्तम्भ के संगत रचक को गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल का योगफल होते हैं ।

संक्षिप्त रूप में

$$BA=C\equiv[c_{ij}],$$

जिसमें
$$c_{ij}=\sum_{1}^{n} b_{ik}\,a_{kj}\ ,$$

तथा
$$A=[a_{ij}] \text{ और } B=[b_{ij}].$$

आव्यूह-गुणन के विषय में निम्नलिखित महत्वपूर्ण बाते ध्यान में रखने योग्य हैं:

(i) ***गुणनफ़ल B A के अस्तित्व के लिए B की स्तम्भ संख्या A की पंक्ति संख्या के बराबर होनी चाहिए ।***

उदाहरणार्थ, यदि

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ और } B=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix},$$

तो BA का अस्तित्व होगा परन्तु AB का नहीं।

(ii) *सामान्यतः गुणनफल BA और AB समान नहीं होते; अर्थात् आव्यूह- गुणन क्रम-विनिमेय नहीं होता।*

उदाहरणार्थ : यदि

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{और} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

ले, तो $AB=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$ और $BA=\begin{pmatrix} -10 & 2 & 21 \\ -16 & 2 & 37 \\ -2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

स्पष्टतया $AB \neq BA.$

(iii) *यदि A, B और C तीन आव्यूह हों, तो यह सरलता से देखा जा सकता है कि*

$$A \times (B+C) = AB + AC,$$

और

$$(A+B) \times C = AC + BC.$$

इस भाँति बीजगणित का वंटन-नियम आव्यूह के लिए भी सत्य है।

प्रश्नावली

1. गुणनफल AB और BA ज्ञात करो जब कि

(i) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(ii) $A=[\,1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4\,], \; B=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$

2. यदि

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ और } B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

तो दिखाओ कि AB शून्य आव्यूह है।

3. यदि

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ और } B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

तो गुणनफल AB का मान ज्ञात करो और दिखाओ कि $A^3=4A$ ।

4. यदि

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ और } B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

तो गुणनफल AB का मान ज्ञात करो। क्या BA का अस्तित्व है ?

5. यदि

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ और } B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

तो AB और BA ज्ञात करो और दिखाओ कि $AB \neq BA$ ।

6. मान निकालो :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 6 \\ -3 & 7 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

विविध प्रश्नावली

1. यदि A, B और C एक ही क्रम के तीन आव्यूह हों, तो दिखाओ कि

(i) $A+B=B+A$,

(ii) $(A+B)+C=A+(B+C)$,

(iii) $rA+rB=r(A+B)$,

(iv) $rA+sA=(r+s)A$,

(v) $rA=Ar$,

जिसमें कि r और s अदिश राशियाँ हैं।

2. आव्यूह-गुणन ज्ञात करो :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

यदि आव्यूहों को उलट दिया जाये, तो क्या गुणन सम्भव हो सकेगा ?

3. यदि

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ और } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

तो AB और BA का मान ज्ञात करो।

4. दिखाओ कि गुणनफल

$$\begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^3 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

शून्य-आव्यूह है।

5. गुणनफल AB ज्ञात करो, जब कि

$A = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$,

और $$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & a_{33} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix},$$

6. आव्यूह

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

का वर्ग ज्ञात करो। [लखनऊ, 1949]

7. आव्यूह

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

का वर्ग और घन ज्ञात करो।

8. यदि

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

और

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

तो गुणनफल EF और FE की अभिगणना कर दिखाओ कि

$$E^2 F + FE^2 = E.$$

9. यदि

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

और I क्रम 3 का आव्यूह हो, तो

$$A^2 - 3A + 9I$$

का मान ज्ञात करो।

10. यदि

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

तो दिखाओ कि

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 + 2k & -4k \\ k & 1 - 2k \end{pmatrix},$$

जब कि k कोई भी धन पूर्ण संख्या है।

11. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \alpha/2 \\ \tan \alpha/2 & 0 \end{bmatrix},$$

और I एकक आव्यूह हो, तो सिद्ध करो कि

$$I+A = (I-A) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

12. मान निकालो

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \times [4 \ 5 \ 2] \times \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \times [3 \ 2].$$

13. सिद्ध करो कि

$$[x \ y \ z] \times \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= ax^2 + by^2 + cz^3 + 2fyz + 2gzx + 2hxy.$$

[राजस्थान, 1960]

14. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix},$$

तो दिखाओ कि

$$AB = 0, \ BA \neq 0; \ AC \neq 0, \ CA = 0.$$

15. तीन आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

के लिए निम्नवर्ती संबंधों का सत्यापन करो :

$$A^2 = B^2 = C^2 = -1 \ ;$$

$$AB = -BA = -C \ ;$$

$$BC = -CB = -A \ ;$$

और

$$CA = -AC = -B \ ;$$

अध्याय 10

सारणिक एवं संबंधित आव्यूह

10·1. इस अध्याय में सारणिक एवं संबंधित आव्यूह के प्रारंभिक गुणधर्मों का वर्णन तथा इनके उपयोग से एक घात समीकरण को हल करने की विविध विधियों का विवेचन किया जायेगा। इनकी सहायता से विद्यार्थीगण सारणिक संकेतन एवं संबंधित आव्यूह का उपयोग वैश्लेपिक ज्यामिति एवं उच्चतर गणित की अन्य शाखाओं के अध्ययन में कर सकेंगे।

10·2. युगपत समीकरण का हल: एक, दो और तीन अज्ञात राशियों के युगपत् समीकरण के प्रारंभिक हल पर विचार करो। हमें ज्ञात है:

(i) समीकरण $a_1x=d_1$ का हल

$x=d_1/a_1$, जब कि $a_1\neq 0$.

(ii) समीकरण

$$a_1x+b_1y=d_1$$
$$a_2x+b_2y=d_2$$

का निरसन से प्राप्त हल

$$x=(d_1b_2-d_2b_1)/(a_1b_2-b_1a_2)$$
$$y=(d_2a_1-d_1a_2)/(a_1b_2-b_1a_2)$$

है, जब कि हर $a_1b_2-b_1a_2$ (जो कि x और y के लिए एक है) शून्य नहीं है।

(iii) इसी भाँति समीकरण

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

के हल में y और z के निरसन एवं न्यूनतम पदों में अभिव्यक्त करने के पश्चात् हमको x का मान एक भागफल के रूप में प्राप्त होता है जिसका हर एक छः पद का व्यंजक

$$a_1b_2c_3-a_1c_2b_3+b_1c_2a_3-b_1a_2c_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3,$$

है और अंश एक अन्य छः पद का व्यंजक है जो कि हर के व्यंजक में a_1, a_2, a_3 के स्थान पर क्रमशः d_1, d_2, d_3 के प्रतिस्थापन से प्राप्त किया जा सकता है।

यदि हम पूर्वोक्त हल की प्रेक्षा करें, तो विदित होगा कि इनमें अंश और हर के व्यंजक निरसन हेतु वज्रगुणन की परिचित क्रियाविधि के कारण उत्पन्न होते हैं। इस सांश्लेपिक विधि द्वारा निर्मित व्यंजक को सारणिक कहते हैं। इनका प्राचीन नाम 'निरसनफल' इनकी ऐतिहासिक उत्पत्ति को पूर्णरूपेण प्रतिबिंबित करता है।

व्यापक सारणिक पूर्वोक्त वज्रगुणन विरचना का 2×2 आव्यूह से $n \times n$ आव्यूह तक का केवल विस्तार है।

किसी वर्ग-आव्यूह A के रचक से रचित वर्ग सारिणी एक सारणिक को भी निर्धारित करती है जिसको आव्यूह A का सारणिक कहते हैं। इसको $|A|$ से निरूपित करते हैं। केले ने 1841 ई० में nवें क्रम के सारणिक $|A|$ को

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

से सूचित किया। इसको

$$(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

के रूप में भी अभिव्यक्त करते हैं।

इस भाँति (ii) में

$$x = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

है और (iii) में x का हर

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

एवं अंश

$$= \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

है।

किसी आव्यूह के प्रत्येक वर्ग उप-आव्यूह के सारणिक को उस आव्यूह का लघु कहते हैं। उदाहरणार्थ, आव्यूह

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

के लघु

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \text{ इत्यादि}$$

हैं।

10·3. सारणिक का विस्तार : हमने पूर्वगत् अनुच्छेद में देखा है कि तृतीय क्रम के सारणिक

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

का विस्तार

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

के रूप में किया जा सकता है। इस विस्तार को निम्न रूपों में भी अभिव्यक्त कर सकते हैं :

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

पूर्वोक्त से स्पष्ट है कि तृतीय क्रम के सारणिक के विस्तार के लिए प्रथम स्तम्भ अथवा प्रथम पंक्ति के प्रत्येक रचक से उस द्वितीय क्रम के सारणिक को गुणा करते हैं जो कि उस रचक वाली पंक्ति और स्तम्भ के निरसन करने पर प्राप्त होता है और इन गुणनफलों के चिन्ह विकल्पतः धन और ऋण लेते हैं।

सारणिक के विस्तार की यह विधि किसी भी क्रम के सारणिक के विस्तार में प्रयोग की जा सकती है।

10·31. उदाहरण : सारणिक

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

का विस्तार ज्ञात करो ।

प्रथम पंक्ति के रचकों के अनुसार विस्तार करने पर निर्दिष्ट सारणिक

$$=a\begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} h & f \\ g & c \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} h & b \\ g & f \end{vmatrix},$$

$$=a(bc-f^2)-h(hc-gf)+g(hf-bg),$$

$$=abc+2hgf-af^2-bg^2-ch^2.$$

प्रश्नावली

निम्न सारणिक का विस्तार कर उनका मान ज्ञात करो :

1. $\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 14 \\ 17 & 14 & 19 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$. 5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

10·4. लघु एवं सहखंड : किसी निर्दिष्ट सारणिक $\triangle$ में से किसी एक रचक वाली पंक्ति और स्तम्भ को निरसन करने पर प्राप्त सारणिक को $\triangle$ सारणिक के उस **रचक का लघु** कहते हैं।

इस भाँति सारणिक

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

में a_2, b_2, c_2 रचक के लघु क्रमशः

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

हैं और इन लघु के पदों में

$$\Delta = -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Δ सारणिक को

$$\Delta = +a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2,$$

जिसमें

$$A_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, C_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

के रूप में अभिव्यक्त करना साधारणतया अधिक सुविधा जनक रहता है।

इन चिन्ह-युक्त लघुओं को क्रमशः a_2, b_2, c_2 के **सहखंड** कहते हैं। स्पष्टतया इन सहखंडों के पदों में

$$\Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1,$$
$$= a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2,$$
$$= a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3.$$

10·5. प्रारंभिक गुणधर्म : अब हम तृतीय क्रम के सारणिक के कुछ प्रारंभिक गुणधर्मों की विवेचना करगे। यह सरलता से सिद्ध किया जा सकता है कि ये गुणधर्म अन्य क्रम के सारणिक के लिए भी सत्य हैं।

प्रमेय : (1) *यदि किसी सारणिक की पंक्तियों का स्तम्भों में और स्तम्भों का पंक्तियों में विनिमय किया जाये, तो उस सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है, अर्थात्*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

वाम पक्षीय सारणिक

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2),$$
$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2),$$
$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

= दक्षिण पक्षीय सारणिक।

उपप्रमेय : पूर्वोक्त प्रमेय के फल को अनुच्छेद 10.4 से सहखंडों के पदों में अभिव्यक्त करने पर प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned}\Delta &= a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1,\\ &= a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3,\\ &= a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2,\\ &= b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3,\\ &= a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3,\\ &= c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3.\end{aligned}$$

(2) यदि किसी सारणिक के दो संलग्न स्तम्भ (अथवा पंक्ति) में विनिमय किया जाये, तो उस सारणिक का संख्यात्मक मान परिवर्तित नही होता परंतु उसके चिन्ह में परिवर्तन हो जाता है; अर्थात्

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

वाम पक्षीय सारणिक

$$\begin{aligned}&= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2),\\ &= -\{b_1(a_2c_3 - a_3c_2) - a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + c_1(b_2a_3 - b_3a_2)\},\\ &= -b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - c_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix},\end{aligned}$$

= दक्षिण पक्षीय सारणिक।

उपप्रमेय: यदि पंक्तियों (अथवा स्तम्भों) के विनिमय की कुल संख्या सम हो, तो सारणिक का मान एवं चिन्ह दोनों ही अपरिवर्तित रहते हैं।

(3) यदि किसी सारणिक की दो पंक्ति (अथवा स्तम्भ) सर्वसम हों, तो सारणिक का मान शून्य होता है; अर्थात्

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

यदि वाम पक्षीय सारणिक का मान Δ हो, तो प्रथम दो स्तम्भों के विनिमय

से प्राप्त सारणिक का मान $-\Delta$ होगा। परंतु प्रथम दो स्तम्भ के सर्वसम होने के कारण सारणिक इस क्रिया के पश्चात् अरूपांतरित रहेगा। अतः

$$\Delta = -\Delta, \text{ अर्थात् } \Delta = 0.$$

उपप्रमेय : यदि सारणिक Δ के रचक b_1, b_2, b_3 के सहखंड B_1, B_2, B_3 हों तो इस प्रमेय के अनुसार

$$a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 = 0.$$

इसी भाँति

$$a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0.$$

सामान्यतः यदि किसी पंक्ति (अथवा स्तम्भ) के सहखंडों को किसी अन्यपंक्ति (अथवा स्तम्भ) के संगत रचकों से गुणा किया जाये, तो गुणनफलों का योग शून्य होता है।

(4) यदि किसी सारणिक की एक पंक्ति (अथवा स्तम्भ) के प्रत्येक रचक को एक ही अचर पद से गुणा करें, तो सारणिक का मान उसी अचर पद से गुणित हो जाता है; अर्थात्,

$$\begin{vmatrix} ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

कल्पना करो कि दक्षिण पक्षीय सारणिक के रचक a_1, a_2, a_3 के सहखंड A_1, A_2 और A_3 हैं; तो यह स्पष्ट है कि वाम पक्षीय सारणिक के रचक ma_1, ma_2, ma_3 के सहखंड भी A_1, A_2 और A_3 होंगे। अतः

वाम पक्षीय सारणिक

$$= ma_1A_1 + ma_2A_2 + ma_3A_3,$$

$$= m(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3),$$

$$= m \text{ (दक्षिण पक्षीय सारणिक)}.$$

इसी भाँति

$$\begin{vmatrix} ma_1 & nb_1 & pc_1 \\ ma_2 & nb_2 & pc_2 \\ ma_3 & nb_3 & pc_3 \end{vmatrix} = mnp \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(5) यदि किसी सारणिक का एक पंक्ति (अथवा स्तम्भ) के रचक किसी अन्य पंक्ति (अथवा स्तम्भ) के संगत रचक के m-गुणज हों, तो सारणिक का मान शून्य होता है।

यह पूर्वोक्त (iii) और (iv) गुणधर्मों से स्पष्ट है।

(6) यदि किसी सारणिक की एक पंक्ति (अथवा स्तम्भ) का प्रत्येक रचक

दो पदों का योगफल हो; तो वह सारणिक उसी क्रम के दो अन्य सारणिकों के योगफ़ल से अभिव्यक्त किया जा सकता है; अर्थात् ,

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

यदि इन तीन सारणिक को क्रमशः D, Δ और Δ' से निरूपित करें, तो स्पष्टतया तीनों सारणिक के प्रथम स्तम्भ के रचक .. सहखंड समान होंगे। अतएव यदि ये सहखंड A_1, A_2, A_3 हों, तो

$$\begin{aligned} D &= (a_1+\alpha_1)A_1+(a_2+\alpha_2)A_2+(a_3+\alpha_3)A_3, \\ &= (a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)+(\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\alpha_3A_3), \\ &= \Delta+\Delta'. \end{aligned}$$

इसी भाँति, सारणिक

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2+\beta_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3+\beta_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1+\beta_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+\beta_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+\beta_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1+\beta_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2+\beta_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3+\beta_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & c_1 \\ a_2 & \beta_2 & c_2 \\ a_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & c_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & c_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

सामान्यतः यदि किसी तृतीय क्रम के सारणिक के स्तम्भ (अथवा पंक्ति) के रचक में क्रमशः m, n और p पद हों, तो उस सारणिक को mnp सराणिकों के योगफल से अभिव्यक्त कर सकते हैं।

(7) यदि किसी सारणिक के एक स्तम्भ (अथवा पंक्ति) के प्रत्येक रचक को किसी अन्य स्तम्भ (अथवा पंक्ति) के संगत रचक के समान गुणजों से घटाया अथवा बढ़ाया जाये, तो उस सारणिक का मान अरूपांतरित रहता है; अर्थात् यदि m धनात्मक अथवा ऋणात्मक हो, तो

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+mb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+mb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} mb_1 & b_1 & c_1 \\ mb_2 & b_2 & c_2 \\ mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

=वाम पक्षीय सारणिक,

क्योंकि प्रमेय 5 के उपप्रमेय के कारण द्वितीय सारणिक का मान शून्य है।

इसी भाँति यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+mb_1+nc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+mb_2+nc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+mb_3+nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

और

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+mb_1 & b_1+nc_1 & c_1 \\ a_2+mb_2 & b_2+nc_2 & c_2 \\ a_3+mb_3 & b_3+nc_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

इस प्रमेय के परिणाम का उपयोग करते समय किसी एक पंक्ति (अथवा स्तम्भ) को अरूपांतरित छोड़ देना आवश्यक है अथवा त्रुटि की सम्भावना रहेगी।

उदाहरण : (i) *सारणिक*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 265 & 240 & 219 \\ 240 & 225 & 198 \\ 219 & 198 & 181 \end{vmatrix}$$

का मान ज्ञात करो।

[इलाहाबाद, 1960]

प्रथम पंक्ति के रचक में तृतीय पंक्ति के संगत रचक को जोड़ने पर प्राप्त रचक से द्वितीय पंक्ति के रचक का दूना घटाने पर प्राप्त होता है

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -12 & 4 \\ 240 & 225 & 198 \\ 219 & 198 & 181 \end{vmatrix},$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 240 & 945 & -42 \\ 219 & 855 & -38 \end{vmatrix},$$

$$=4 \begin{vmatrix} 945 & -42 \\ 855 & -38 \end{vmatrix},$$

$$= 4.45\ (-2) \begin{vmatrix} 21 & 21 \\ 19 & 19 \end{vmatrix},$$

$$= 0.$$

(ii) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

[उत्कल, 1952]

प्रमेय 6 की सहायता से वाम पक्ष सारणिक

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}, \quad (1)$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a+b \\ q & r & p+q \\ y & z & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & a & a+b \\ q & p & p+q \\ y & x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c & a+b \\ r & r & p+q \\ z & z & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix}, \quad (2)$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & b \\ q & r & q \\ y & z & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & a & a \\ q & p & p \\ y & x & x \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} p & a & b \\ q & p & q \\ y & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a \\ r & p & p \\ z & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}, \quad (3)$$

क्योंकि (2) का तृतीय सारणिक प्रमेय 3 के कारण शून्य है;

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}, \quad (4)$$

क्योंकि (3) के द्वितीय, तृतीय चतुर्थ एवं पंचम सारणिक प्रमेय 3 के कारण शून्य हैं;

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

प्रमेय 2 के उपप्रमेय के कारण;

$$= 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & q & \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

प्रश्नावली

मान ज्ञात करो :

1. $\begin{vmatrix} 20 & 30 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \\ 40 & 10 & 1 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

[लखनऊ, 1947]

3. $\begin{vmatrix} 21 & 17 & 7 & 10 \\ 24 & 22 & 6 & 10 \\ 6 & 8 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

[वाराणसी, 1949]

4. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 29 & 2 & 14 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \\ 33 & 30 & 8 & 38 \end{vmatrix}$.

[आगरा, 1958]

5. $\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & 1 & w \end{vmatrix}$, यदि w एक का एक काल्पनिक घनमूल है।

[दिल्ली, 1958]

6. $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & x \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$.

[अनामलाई, 1953]

7. $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$

[राजस्थान, 1952]

सिद्ध करो :

8. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b).$

[नागपुर, 1930]

9 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c),$

[दिल्ली, 1954]

10. $\begin{vmatrix} x & p & q & 1 \\ a & x & r & 1 \\ a & b & x & 1 \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix} = (x-a)(x-b)(x-c).$

11. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ hz & zx & xy \end{vmatrix} = (y-z)(z-x)(x-y)(yz+zx+xy).$

[राजस्थान, 1959]

12. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d) \times (a-b-c+d)(a+b-c-d).$

[नागपुर, 1950]

13. $\begin{vmatrix} Sin^2A & SinA\ CosA & Cos^2A \\ Sin^2B & SinB\ CosB & Cos^2B \\ Sin^2C & SinC\ CosC & Cos^2C \end{vmatrix} = -Sin\ (A-B)\ Sin\ (B-C) \times Sin\ (C-A),$

जब कि $A+B+C=\pi$. [पंजाब, 1960]

10·6. सारणिक के गुणनफल : अब हम दो सारणिकों के गुणनफल से संबंधित एक व्यापक प्रमेय सिद्ध करगे। इस प्रमेय की सहायता से एक ही क्रम के दो सारणिकों का गुणनफल ज्ञात किया जा सकता है और विलोमतः कुछ सारणिकों को दो अन्य समान क्रम के सारणिकों के गुणनफल के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है।

प्रमेय : यदि

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_1 \quad {}_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_1 \alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \\ a_2 \alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 & a_2 \alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 & a_2 \alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \\ a_3 \alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1 & a_3 \alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2 & a_3 \alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix},$$

तो $$\Delta\Delta' = D.$$

सारणिक D का प्रत्येक रचक तीन राशियों का योगफल है। अतः इसको $3 \times 3 \times 3 = 27$ सारणिकों के योगफल के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है। इनमें से एक सारणिक

$$\begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 & a_1 \alpha_2 & b_1\beta_3 \\ a_2 \alpha_1 & a_2 \alpha_2 & b_2\beta_3 \\ a_3 \alpha_1 & a_3 \alpha_2 & b_3\beta_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \alpha_2 \beta_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

क्योंकि सारणिक के दो स्तम्भ सर्वसम हैं। निरीक्षण करने पर ज्ञात होता है कि इन 27 में से 21 सारणिक शून्य हैं और शेष 6 सारणिकों में से जो शून्य नहीं हैं, एक सारणिक

$$\begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 & b_1\beta_2 & c_1\gamma_3 \\ a_2 \alpha_1 & b_2\beta_2 & c_2\gamma_3 \\ a_3 \alpha_1 & b_3\beta_2 & c_3\gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2\gamma_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1\beta_2\gamma_3 \, \Delta.$$

इसी प्रकार अन्य सारणिकों में जो शून्य नहीं हैं उनका Δ एक गुणनखंड है। इनको एकत्र करने पर विदित होता है कि

$$D = (\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_2\beta_2\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1)\Delta$$

$$= \Delta'\Delta.$$

10·61. पूर्वगत अनुच्छेद से स्पष्ट है कि

एक ही क्रम के दो सारणिकों का गुणनफल समान क्रम का एक अन्य सारणिक होता है।

अब हम इसका एक वैकल्पिक प्रमाण देंगे।

तीन सम-एक घात समीकरण

$$\left.\begin{aligned} a_1X + b_1Y + c_1Z = 0 \\ a_2X + b_2Y + c_2Z = 0 \\ a_3X + b_3Y + c_3Z = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

जिसमें
$$\left.\begin{aligned} X &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ Y &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ Z &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{aligned}\right\} \quad (2)$$
पर विचार करो और यह कल्पना करो कि x, y, z शून्य नहीं हैं।

संबंध (1) में X, Y, Z का मान प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है :

$$\left.\begin{aligned} &(a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 + c_1\alpha_3)x + (a_1\beta_1 + b_1\beta_2 + c_1\beta_3)y \\ &\qquad + (a_1\gamma_1 + b_1\gamma_2 + c_1\gamma_3)z = 0 \\ &(a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 + c_2\alpha_3)x + (a_2\beta_1 + b_2\beta_2 + c_2\beta_3)y \\ &\qquad + (a_2\gamma_1 + b_2\gamma_2 + c_2\gamma_3)z = 0 \\ &(a_3\alpha_1 + b_3\alpha_2 + c_3\alpha_3)x + (a_3\beta_1 + b_3\beta_2 + c_3\beta_3)y \\ &\qquad + (a_3\gamma_1 + b_3\gamma_2 + c_3\gamma_3)z = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

x, y, z के शून्य के अतिरिक्त अन्य मान से समुच्चय (3) की संतुष्टि के लिए यह आवश्यक है कि

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 + c_1\alpha_3 & a_1\beta_1 + b_1\beta_2 + c_1\beta_3 & a_1\gamma_1 + b_1\gamma_2 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 + c_2\alpha_3 & a_2\beta_2 + b_2\beta_2 + c_2\beta_3 & a_2\gamma_1 + b_2\gamma_2 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\alpha_2 + c_3\alpha_3 & a_3\beta_3 + b_3\beta_2 + c_3\beta_3 & a_3\gamma_1 + b_3\gamma_2 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

परंतु समुच्चय (1) के समीकरण के सामंजस्य के लिए यह आवश्यक है कि या तो

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

अथवा
$$\left.\begin{aligned} X &\equiv \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0 \\ Y &\equiv \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0 \\ Z &\equiv \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = 0 \end{aligned}\right\}.$$

द्वितीय प्रतिबंध से प्राप्त होता है

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

क्योंकि $x, y, z \neq 0$ ।

स्पष्टतया समुच्चय (1) ग्रोर (3) सर्वसम संबंध को अभिव्यक्त करते हैं। इस कारण संबंध (4) संबंध (5) ग्रोर (6) के तुल्य है। अतः (4) के सारणिक में (5) ग्रोर (6) के सारणिकों का गुणनखंडों के रूप में समावेश होना चाहिए। सारणिकों की विमिति से यह भी स्पष्ट है कि (4) के सारणिक का संख्यात्मक अचर के अतिरिक्त कोई अन्य गुणनखंड नहीं हो सकता।

अतः

$$k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\alpha_2+c_1\alpha_3 & a_1\beta_1+b_1\beta_2+c_1\beta_3 & a_1\gamma_1+b_1\gamma_2+c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\alpha_2+c_2\alpha_3 & a_2\beta_1+b_2\beta_2+c_2\beta_3 & a_2\gamma_1+b_2\gamma_2+c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1+b_2\alpha_2+c_3\alpha_3 & a_3\beta_1+b_3\beta_2+c_3\beta_3 & a_3\gamma_1+b_3\gamma_2+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

अवयव $a_1b_2c_3\alpha_1\beta_2\gamma_3$ गुणकों के की तुलना करने पर ज्ञात होता है कि $k=1$।

अतएव प्रमेय प्रमाणित हो जाता है।

टिप्पणी: (1) पूर्वोक्त विधियों से अन्य क्रम के सारणिकों के लिए भी समरूप फल प्राप्त किए जा सकते हैं।

(2) गुणनफल सारणिक के अनेक रूप हो सकते हैं। यह रूप गुणा करने के पूर्व $\triangle$ अथवा $\triangle'$ में अथवा दोनों में, दो पंक्तियों के विनिमय, अथवा पंक्तियों का स्तम्भों में विनिमय कर प्राप्त किए जा सकते हैं। परन्तु विस्तार करने पर इन सबसे एक ही फल प्राप्त होता है।

10·62. उदाहरण : (i) मान ज्ञात करो :

$$\begin{vmatrix} a^2+\lambda^2 & ab+c\lambda & ca-b\lambda \\ ab-c\lambda & b^2+\lambda^2 & bc+a\lambda \\ ca+b\lambda & bc-a\lambda & c^2+\lambda^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \lambda & c & -b \\ -c & \lambda & a \\ b & -a & \lambda \end{vmatrix}$$

[विक्रम, 1962]

अनुच्छेद 10·6. के प्रमेय के अनुसार गुणनफल सारणिक की प्रथम पंक्ति का

प्रथम रचक $=\lambda(a^2+\lambda^2)+c(ab+c\lambda)-b(ca-b\lambda)$,

$=\lambda(a^2+b^2+c^2+\lambda^2)$;

द्वितीय रचक $= -c(a^2+\lambda^2)+\lambda(ab+c\lambda)+a(ca-b\lambda),$

$=0;$

तृतीय रचक $=b(a^2+\lambda^2)-a(ab+c\lambda)+\lambda(ca-b\lambda),$

$=0.$

इसी भाँति द्वितीय एवं तृतीय पंक्ति के रचक का मान ज्ञात करने पर प्राप्त होता है

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda(a^2+b^2+c^2+\lambda^2) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(a^2+b^2+c^2+\lambda^2) & 0 \\ & 0 & \lambda(a^2+b^2+c^2+\lambda^2) \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3(a^2+b^2+c^2+\lambda^2)^3$$

(ii) सारणिक

$$\begin{vmatrix} (a-x)^2 & (b-x)^2 & (c-x)^2 \\ (a-y)^2 & (b-y)^2 & (c-y)^2 \\ (a-z)^2 & (b-z)^2 & (c-z)^2 \end{vmatrix}$$

को दो अन्य सारणिकों के गुणन के रूप में अभिव्यक्त करो। [इलाहाबाद, 1956]

यदि निर्दिष्ट सारणिक को D से सूचित किया जाये, तो

$$D = \begin{vmatrix} a^2-2ax+x^2 & b^2-2bx+x^2 & c^2-2cx+x^2 \\ a^2-2ay+y^2 & b^2-2by+y^2 & c^2-2cy+y^2 \\ a^2-2az+z^2 & b^2-2bz+z^2 & c^2-2cz+z^2 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

यदि यह $\Delta\Delta'$ के बराबर हो, तो रचकों के निरीक्षण से स्पष्ट है कि Δ की तीन पंक्तियों में क्रमशः x, y, z के पद होंगे, और Δ' की तीन पंक्तियों में क्रमशः a, b, c के पद होंगे। यह भी स्पष्ट है कि प्रथम पंक्ति का प्रथम रचक

$$1.a^2+x(-2a)+x^2.1$$

के रूप में लिखा जा सकता है; अतः कल्पना को कि

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a^2 & -2a & 1 \\ b^2 & -2b & 1 \\ c^2 & -2c & 1 \end{vmatrix}.$$

यदि अब हम इन दो सारणिकों को गुणा कर फल की (1) से तुलना करें, तो इस फल की सत्यता विदित हो जाती है।

प्रश्नावली

निम्नलिखित को एक सारणिक के रूप में अभिव्यक्त कर मान ज्ञात करो :

1, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} o & c & b \\ c & o & a \\ b & a & o \end{vmatrix}^2.$

3. सिद्ध करो कि सारणिक

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$$

एक पूर्ण वर्ग है और इसका मान ज्ञात करो।

[जबलपुर, 1962]

4. सारणिक

$$\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix}$$

को दो सारणिकों के गुणनफल के रूप में अभिव्यक्त कर उसका मान ज्ञात करो।

[आगरा, 1957]

5. दिखाओ कि

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & bc+ca+ab & bc+ca+ab \\ bc+ca+ab & a^2+b^2+c^3 & bc+ca+ab \\ bc+ca+ab & bc+ca+ab & a^2+b^2+c^2 \end{vmatrix} = (a^3+b^3+c^3-3abc)^2.$$

[लखनऊ, 1948]

10·7. युगपत् समीकरण का हल : सारणिक के गुणधर्मो का उपयोग एक घात युगपत् समीकरण को हल करने में किया जा सकता है। सरलता के लिए केवल तीन अज्ञात पद के युगपत् समीकरण के हल की विधियाँ दी जायेंगी। परन्तु यह एक व्यापक

विधि हैं जो कि कितने ही अज्ञात पद के समीकरण के हल करने में उपयोग की जा सकती हैं।

कल्पना करो कि हमको निम्नलिखित समीकरण को हल करना है :

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\ ,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\ ,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0\ .$$

सारणिक

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

को Δ से एवं इसके रचकों के सहखंडों को संगत बड़े अक्षरों $A_1, A_2, A_3, \ldots$ इत्यादि से निरूपित करो।

निर्दिष्ट समीकरण को क्रमशः A_1, A_2, A_3 से गुणा करने पर प्राप्त होता है

$$(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)\ x+(d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3)=0;$$

शेष पद अनुच्छेद 10.5 के प्रमेय 3 के कारण शून्य हैं।

$$\therefore\ x=-\frac{d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3}{a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3}=-\frac{(d_1b_2c_3)}{\Delta}\ .$$

इसी प्रकार से

$$y=-\frac{(a_1d_2c_3)}{\Delta}\ ,$$

$$z=-\frac{(a_1b_2d_3)}{\Delta}\ .$$

इन फलों को निम्नलिखित सममित रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}=\frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}=\frac{-1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

10·71. उदाहरण : हल करो

$$x+y+z=1\ ,$$
$$ax+by+cz=d\ ,$$
$$a^2x+b^3y+c^2z=d^2\ .$$

[दिल्ली, 1961]

अनुच्छेद 10.7 से प्राप्त होता है

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ b & c & -d \\ b^2 & c^2 & -d^2 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & c & -d \\ a^2 & c^2 & -d^2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & b & -d \\ a^2 & b^2 & -d^2 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}$$

सारणिक का विस्तार कर सरल करने पर प्राप्त होता है

$$x = \frac{(d-b)\ (d-c)}{(a-b)\ (a-c)},$$

$$y = \frac{(d-c)\ (d-a)}{(b-c)\ (b-a)},$$

$$z = \frac{(d-a)\ (d-b)}{(c-a)\ (c-b)}.$$

प्रश्नावली

सारणिक के गुणधर्मों द्वारा निम्नलिखित समीकरण को हल करो:

1. $3x + 2y + z = 1,$
   $4x + 3y + 2z = 3,$
   $5x + y + 3z = 2.$

2. $x + 2y + 3z = 6,$
   $2x + 4y + z = 7,$
   $3x + 2y + 9z = 14.$

3. $x - y + z = a + b,$
   $y - z + x = b + c,$
   $z - x + y = c + a.$

4. $x + y + z + \mu = 1,$
   $ax + by + cz + d\mu = k,$
   $a^2x + b^3y + c^2z + d^2\mu = k^2,$
   $a^3x + b^3y + c^3z + d^3\mu = k^3.$

5. सारणिक

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

के गुणनखंड कर x का वह मान ज्ञात करो जो समीकरण

$$ax + by + cz = k,$$
$$a^2x + b^2y + c^2z = k^3$$
$$a^3x + b^3y + c^3z = k^3.$$

को संतुष्ट करे। [लखनऊ, 1951]

10·8 संबंधित आव्यूह: अब हम आव्यूह A

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

से संबंधित कुछ आव्यूह का वर्णन करगे।

किसी आव्यूह A की पंक्तियों का स्तम्भों में और स्तम्भों का पंक्तियों में विनिमय से प्राप्त आव्यूह को **आव्यूह A का पक्षांतरण** कहते हैं। इस भाँति आव्यूह

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

आव्यूह

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

का पक्षांतरण है। A के पक्षांतरण को साधारणतया A' से निरूपित करते हैं।

यदि किसी वर्ग आव्यूह A का सारणिक $\Delta = 0$, तो आव्यूह को ***विचित्र आव्यूह*** कहते हैं। यदि $\Delta \neq 0$, तो इसको ***साधारण*** अथवा ***अविचित्र आव्यूह*** कहते हैं।

सारणिक Δ के रचक $a_1, b_1, c_1, \ldots$ के सहखंडों $A_1, B_1, C_1, \ldots$ से रचित आव्यूह के पक्षांतरण

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$$

को (1) का **सह खंडज आव्यूह** कहते हैं।

आव्यूह (2) के प्रत्येक रचक को Δ से भाग करने पर प्राप्त आव्यूह को (1) का **व्युत्क्रम आव्यूह** कहते हैं। स्पष्टतया व्युत्क्रम आव्यूह के अस्तित्व के लिए यह आवश्यक है कि $\Delta \neq 0$, अर्थात्, मूल आव्यूह विचित्र आव्यूह नहीं होना चाहिए।

यदि मूल आव्यूह को A से निरूपित करें, तो इसके सह खंडज आव्यूह को $adjA$ और इसके व्युत्क्रम आव्यूह को A^{-1} से निरूपित करते हैं। परिभाषा से स्पष्ट है कि

$$A^{-1} = (adj\ A)/\Delta .$$

10.81 एक महत्वपूर्ण गुण : *यदि किसी आव्यूह A का व्युत्क्रम आव्यूह A^{-1} हो, तो*

$$AA^{-1} = A^{-1} A = I.$$

यहाँ $$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix},$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1 & a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2 & a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3 \\ a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1 & a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2 & a_2A_3+b_2B_3+c_2C_3 \\ a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1 & a_3A_2+b_3B_2+c_3C_2 & a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3 \end{bmatrix},$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv I.$$

इसी भाँति हम सिद्ध कर सकते हैं कि $A^{-1}A = I$.

10.82. व्युत्क्रम आव्यूह की अभिगणना : व्युत्क्रम आव्यूह की अभिगणना या तो परिभाषा अथवा गुणों की सहायता से करते हैं। यह दोनों विधियाँ निम्नलिखित उदाहरण से स्पष्ट हो जायेंगी।

उदाहरण : आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

के व्युत्क्रम की अभिगणना करो।

प्रथमविधि : यहाँ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 ;$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \; A_2 = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 ; \; A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

इसी भाँति

$$B_1 = 8 \; ; \; B_2 = -6 \; ; \; B_3 = +2 ,$$
$$C_1 = -5 \; ; \; C_2 = +3 \; ; \; C_3 = -1.$$

$$\therefore adj\ A = \begin{pmatrix} -1 & +1 & -1 \\ 8 & -6 & +2 \\ -5 & +3 & -1 \end{pmatrix}$$

और

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

द्वितीय विधि : आव्यूह समीकरण

$$AX = B$$

से प्राप्त होता है कि

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} ;$$

अथवा

$$0 + x_2 + 2x_3 = b_1,$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b_2,$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 = b_3.$$

हल करने पर

$$x_1 = \frac{b_1}{2} - \frac{b_1}{2} + \frac{b_3}{3} ,$$

$$x_2 = -4b_1 + 3b_2 - b_3 ,$$

$$x_3 = \frac{5b_1}{2} - \frac{3b_2}{2} + \frac{b_3}{2} ;$$

अथवा $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

अथवा $$X = A^{-1}B.$$

अतः $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

प्रश्नावली

1. यदि $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

तो इसका पक्षांतरण A' और गुणनफल AA' ज्ञात करो।

.2 यदि $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

तो A^2, A^3 और A^{-1} का मान ज्ञात करो।

3. आव्यूह $$\begin{bmatrix} Cos\ x & Sin\ x \\ -Sin\ x & Cos\ x \end{bmatrix},$$

का सहखंडज आव्यूह ज्ञात करो और सत्यापन करो कि

$$A(adj\ A) = (adj A)\ A = |A|\ I.$$

4. आव्यूह $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

का पक्षांतरण A', सहखंडज $adj\ A$ और व्युत्क्रम A^{-1} ज्ञात करो।

निम्नलिखित आव्यूह के व्युत्क्रम की अभिगणना करो:

5. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

निम्नवत आव्यूह के व्युत्क्रम की अभिगणना करो और संबंध $AA^{-1}=1$ के द्वारा अपने उत्तर का सत्यापन करो :

9. $\begin{bmatrix} Cos\ \theta & -Sin\ \theta & 0 \\ Sin\ \theta & Cos\ \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

10·83. युगपत् समीकरण का हल : व्युत्क्रम आव्यूह के उपयोग से एक घात युगपत् समीकरण को हल किया जा सकता है। सरलता के लिए केवल तीन अज्ञात पद के युगपत् समीकरण के हल करने की विधि दी जाएगी। परन्तु यह एक व्यापक व्यापक विधि है जो कि कितने ही अज्ञात पद के समीकरणों को हल करने में उपयोग की जा सकती है।

कल्पना करो कि हमको निम्नलिखित समीकरण को हल करना है:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned} \qquad (1)$$

इन समीकरण का तुल्य आव्यूह-समीकरण

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

अथवा, संक्षिप्त में

$$AX = D$$

है, जिसमें A, X और D क्रमशः (2) के तीन आव्यूहों को निरूपित करते हैं। समीकरण (3) के दोनों पक्षों को व्युत्क्रम आव्युह A^{-1} से गुणा करने पर प्राप्त होता है

$$A^{-1}AX = A^{-1}D,$$

अथवा

$$IX = A^{-1}D,$$

अथवा

$$X = A^{-1}D,$$

अर्थात्,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

यह समीकरण (1) का हल है।

उदाहरण: हल करो:

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 6. \end{aligned}$$

यहाँ $\Delta = -2;$

$$\begin{aligned} &A_1 = -1; \; A_2 = +1; \; A_3 = -1; \\ &B_1 = 8; \; B_2 = -6; \; B_3 = +2; \\ &C_1 = -5; \; C_2 = +3; \; C_3 = -1. \end{aligned}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

और

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -8 & 12 & -6 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

अतः $x = 2, y = -2, z = 2.$

प्रश्नावली

निम्नलिखित युगपत् समीकरणों को आव्यूह के गुण धर्मों द्वारा हल करो :

1. $2x - y = 4,$
   $3x + 2y = 7.$

2. $x + y + z = 3,$
   $x + 2y + 3z = 4,$
   $x + 4y + 9z = 6.$

3. $x + 2y - 2z = 1,$
   $2x - 7z = 3,$
   $x + y - z = 5.$

4. $3x_1 - x_2 + 6x_3 = 1,$
   $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0,$
   $2x_1 - 3x_2 - x_3 + 9 = 0.$

5. $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 5,$
   $2x_3 + x_2 + 4x_1 - 1 = 0,$
   $8x_1 + x_3 - x_2 - 5 = 0.$

10·9. विविध उदाहरण : (i) *दिखाओ कि समीकरण*

$$\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

का एक मूल $x = 2$ है और इसको पूर्णतया हल करो।

[आगरा, 1948]

वाम पक्ष सारणिक में $x = 2$ रखने पर इसकी प्रथम दो पंक्तियाँ सर्वसम और अतः सारणिक का मान शून्य हो जाता है। इस कारण $x = 2$ इस समीकरण का एक मूल है।

यदि वाम पक्ष सारणिक को Δ से निरूपित कर, तो प्रथम पंक्ति में से द्वितीय पंक्ति को घटाने पर प्राप्त होता है

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-2 & 3x-6 & 2-x \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix},$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix},$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3x-6 & x-1 \\ -3 & 2x+9 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)\,(x-1)\begin{vmatrix} -3x-6 & 1 \\ 2x+9 & 1 \end{vmatrix},$$

$$= -5(x-2)\,(x-1)\,(x+3).$$

अतः निर्दिष्ट समीकरण के मूल 1, 2 और -3 हैं।

(ii) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)\,(c-a)\,(b-a).$$

यदि $b=a$ अथवा $c=a$ अथवा $c=b$ लें, तो सारणिक के दो स्तम्भ सर्वसम हो जाते हैं और सारणिक शून्य हो जाता है। इस कारण $(c-b)$, $(c-a)$ और $(b-a)$ सारणिक के गुणनखड हैं। यह भी सरलता से देखा जा सकता है कि सारणिक a b, c, में एक सम त्रिघात व्यंजक है। अतः

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = k\,(c-b)\,(c-a)\,(b-a).$$

दोनो पक्षों में अग्रग पद bc^2 के गुणांकों की तुलना करने पर $k=1$ प्राप्त होता है।

अतएव परिणाम सिद्ध हो जाता है।

(iii) यदि सारणिक

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

में $a_1, b_1, c_1, \ldots$ रचक के सहखंड $A_1, B_1, C_1, \ldots$ हों, तो सिद्ध करो कि

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}.$$

[पंजाब, 1962]

कल्पना करो कि

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix};$$

तो गुणनफल सारणिक $\Delta\Delta'$ के प्रथम स्तम्भ का

प्रथम रचक $= a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = \Delta$;
द्वितीय रचक $= a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0$;
तृतीय रचक $= a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 = 0$.

इसी भाँति द्वितीय एवं तृतीय स्तम्भों के रचक ज्ञात किए जा सकते हैं;
तब

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^3.$$

अतः $\Delta' = \Delta^2$, जो कि वांछित फल है।

(iv) यदि

$$(f^2 - bc)x + (ch - fg)y + (bg - hf)z = 0,$$
$$(ch - fg)x + (g^2 - ca)y + (af - gh)z = 0,$$
$$(bg - hf)x + (af - gh)y + (h^2 - ab)z = 0,$$

तो दिखाओ कि

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0.$$

निर्दिष्ट तीनों समीकरण के सामंजस्य के लिए यह आवश्यक है कि

$$\begin{vmatrix} f^2 - bc & ch - fg & bg - hf \\ ch - fg & g^2 - ca & af - gh \\ bg - hf & af - gh & h^2 - ab \end{vmatrix} = 0,$$

अथवा

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}^2=0.$$

इसका विस्तार करने पर वांछित फल प्राप्त हो जाता है।

विविध प्रश्नावली

मान ज्ञात करो :

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 69 \end{vmatrix}.$$

[आगरा, 1954]

2. $$\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix}.$$

[यू॰ पी॰ सी॰ एस॰, 1947)

3. $$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$$

[आगरा, 1954]

4. $$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

[इलाहाबाद, 1959]

5. सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

और द्वितीय सारणिक का मान ज्ञात करो। [अलीगढ़, 1953]

6. यदि w एक का एक काल्पनिक घनमूल हो, तो दिखाओ कि

$$\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ w & w^2 & w^3 & 1 \\ w^2 & w^3 & 1 & w \\ w^3 & 1 & w & w^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

अतएव यह सिद्ध करो कि वाम पक्ष सारणिक का मान $3\sqrt{(-3)}$ है।

[आगरा, 1955]

7. यदि $a+b+c=0$, तो हल करो,

$$\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0.$$

[आँन्ध्र, 1954]

निम्नलिखित समीकरण को हल करो:

8. $$\begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 3x-4 \\ x-4 & 2x-9 & 3x-16 \\ x-8 & 2x-27 & 3x-64 \end{vmatrix} = 0.$$

[आगरा, 1951]

9. $$\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} = 0.$$

[गोरखपुर, 1962]

10. $$\begin{vmatrix} 4x & 6x+2 & 8x+1 \\ 6x+2 & 9x+2 & 12x \\ 8x+1 & 12x & 16x+2 \end{vmatrix} = 0.$$

[लखनऊ, 1950]

सिद्ध करो:

11. $$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & x \\ 5 & 6 & 7 & y \\ 6 & 7 & 8 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = (x-2y+z)^2.$$

[सागर, 1962]

12. $$\begin{vmatrix} 1 & bc+ad & b^2c^2+a^2d^2 \\ 1 & ca+bd & c^2a^2+b^2d^2 \\ 1 & ab+cd & a^2b^2+c^2d^2 \end{vmatrix} = -(b-c)(c-a)(a-b)(a-d) \times (b-d)(c-d).$$

[पंजाब, 1951]

13. $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+cda \\ 1 & c & c^2 & c^3+dab \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{vmatrix}=0.$$

[गोरखपुर, 1952]

14. $$\begin{vmatrix} (a-x)^2 & (b-x)^2 & (c-x)^2 \\ (a-y)^2 & (b-y)^2 & (c-y)^2 \\ (a-z)^2 & (b-z)^2 & (c-z)^2 \end{vmatrix}=2(b-c)(c-a)(a-b) \times (y-z)(z-x)(x-y).$$

[नागपुर, 1954]

15. $$\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}=4a^2b^2c^2.$$

[अलीगढ़, 1952]

16. $$\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix}=-(ac-b^2) \times (ax^2+2bxy+cy^2).$$

[लखनऊ, 1957]

17. $$\begin{vmatrix} a^2 & a^2-(b-c)^2 & bc \\ b^2 & b^2-(c-a)^2 & ca \\ c^2 & c^2-(a-b)^2 & ab \end{vmatrix}=(b-c)(c-a)(a-b) \times (a+b+c)(a^2+b^3+c^2).$$

[इलाहाबाद, 1955]

18. $$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)^3.$$

[काश्मीर, 1951]

19. $$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}=2abc\ (a+b+c)^3.$$

[आगरा, 1962]

20. $$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix}=(a^2+b^2+c^2+d^2+1).$$

[कर्नाटक, 1954]

21. $$\begin{vmatrix} b^2+c^2+1 & c^2+1 & b^2+1 & b+c \\ c^2+1 & c^2+a^2+1 & a^2+1 & c+a \\ b^2+1 & a^2+1 & a^2+b^2+1 & a+b \\ b+c & c+a & a+b & 3 \end{vmatrix} = (bc+ca+ab)^2.$$

[राजस्थान, 1950]

22. सारणिक के गुणधर्मों के प्रयोग से हल करो:

$$x+y+z=0,$$
$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0,$$
$$bcx+cay+abz=1.$$

23. दिखाओ कि

$$\begin{pmatrix} 1 & -\tan\theta/2 \\ \tan\theta/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tan\theta/2 \\ -\tan\theta/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

24. आव्यूह के गुणधर्मों की सहायता से हल करो:

(i) $5x+3y+7z=4,$ $3x+26y+2z=9,$ $7x+2y+10z=5$

(ii) $x_1+x_2+x_3=6,$ $x_1+2x_2+3x_3=14,$ $x_1+4x_2+7x_3=30.$

25. सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha-i\beta & \gamma-i\delta \\ -\gamma-i\delta & \alpha+i\beta \end{vmatrix}$$

को

$$\begin{vmatrix} A-iB & C-iD \\ -C-iD & A+iB \end{vmatrix}$$

के रूप में अभिव्यक्त कर सकते हैं। अतः दिखाओ कि चार वर्ग के दो योगफलों के गुणनफल को चार वर्ग के योगफल के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है।

[त्रावणकोर, 1947]

26. यदि $r^2=x^2+y^2+z^2$ और $u^2=yz+zx+xy$ हो, तो दिखाओ कि

$$\begin{vmatrix} yz-x^2 & zx-y^2 & xy-z^2 \\ zx-y^2 & xy-z^2 & yz-x^2 \\ xy-x^2 & yz-x^2 & zx-y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r^2 & u^2 & u^2 \\ u^2 & r^2 & u^2 \\ u^2 & u^2 & r^2 \end{vmatrix}.$$

[वाराणसी, 1959]

अध्याय 11

समीकरण-सिद्धांत

11.1. हम प्रारम्भिक वीजगणित में वर्ग समीकरण सिद्धांत का अध्ययन कर चुके हैं। अब इस अध्याय में परिमेय पूर्ण सांख्यिक वीजीय समीकरण के कुछ मौलिक गुणों का विवेचन एवं संख्यात्मक समीकरण के हल की विधियों का वर्णन करेंगे।

11.2. परिभाषा: किसी शून्य से समीकृत x के फलन को ***समीकरण*** कहते हैं यदि फलन केवल x के विशेष मान के लिए शून्य के बराबर हो। इस भाँति $x^2-5x+6=0$ समीकरण है क्योंकि फलन x^2-5x+6, x के 2 अथवा 3 के अतिरिक्त किसी अन्य मान के लिए शून्य के बराबर नहीं है। यदि x के प्रत्येक मान के लिए $f(x)$ शून्य के बराबर हो, तो $f(x)=0$ को ***सर्वसमिका*** कहते हैं।

x के किसी मान α को जो कि समीकरण को संतुष्ट करता है, ***समीकरण का मूल*** कहते हैं। यह तब ही सम्भव है जब कि $f(x)$ का एक गुणनखंड $(x-\alpha)$ है। अतः जब समीकरण का एक मूल α हो, तो यह अन्तर्निहित है कि $(x-\alpha)$ समीकरण का एक गुणनखंड है।

किसी समीकरण के समस्त मूल ज्ञात करने को ***समीकरण का हल करना*** कहते हैं। किसी

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

के समरूप व्यंजक को, जिसमें गुणांक $a_0, a_1, a_2, \ldots$ इत्यादि परिमेय संख्या और घात $n, n-1, n-2, \ldots$ इत्यादि पूर्ण संख्या हैं, x का ***परिमेय पूर्ण सांख्यिक फलन अथवा बहुपद*** और इसको शून्य से समीकृत करने पर प्राप्त समीकरण

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (1)$$

को ***परिमेय पूर्ण सांख्यिक अथवा बहपद समीकरण*** कहते हैं। यह बहुपद समीकरण का मानक रूप भी है।

प्रायः समीकरण (1) को a_0 से भाग कर

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n=0 \qquad (2)$$

के रूप में अभिव्यक्त करना सुविधाजनक रहता है। इस अध्याय में (2) को संक्षिप्त रूप $f(x)=0$ से सूचित करेंगे।

किसी समीकरण में x की उच्चतम घात को ***समीकरण की कोटि*** कहते हैं। इस भांति $x^2-5x+6=0$ द्वितीय कोटि का समीकरण, $x^3-1=0$ तृतीय कोटि का समीकरण और (1) n^{th} कोटि का समीकरण है। द्वितीय, तृतीय एवं चतुर्थ कोटि के समीकरण को क्रमशः वर्ग, घन एवं चतुर्घात समीकरण भी कहते हैं।

1·3. समीकरण के गुण : अब हम परिमेय पूर्ण-सांख्यिक समीकरण के कुछ उपयोगी गुणों का विवेचन करेंगे।

प्रमेय : (1) ***प्रत्येक समीकरण $f(x)=0$ का एक मूल, वास्तविक अथवा काल्पनिक, होता है।***

इस मूल प्रमेय का प्रमाण कठिन है और इस पुस्तक के अभिप्राय के बाहर है।

(2) ***प्रत्येक n कोटि के समीकरण $f(x)=0$ के यथार्थतः n मूल होते हैं।***

समीकरण

$$f(x)\equiv x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0 \tag{1}$$

पर विचार करो।

इस समीकरण का एक मूल वास्तविक अथवा काल्पनिक होगा। कल्पना करो कि यह α_1 है; तो $f(x)$ का $(x-\alpha_1)$ एक गुणनखंड है, और

$$f(x)\equiv(x-\alpha_1)\ f_1(x), \tag{2}$$

जब कि $f_1(x)$ एक $n-1$ कोटि का परिमेय पूर्ण सांख्यिक व्यंजक है।

पुनः, समीकरण $f_1(x)=0$ का एक मूल, वास्तविक अथवा काल्पनिक, होगा। कल्पना करो कि यह मूल α_2 है; तो $f_1(x)$ का एक गुणनखंड $(x-\alpha_2)$ होगा और

$$f_1(x)\equiv(x-\alpha_2)\ f_2(x), \tag{3}$$

जब कि $f_2(x)$ एक $n-2$ कोटि का परिमेय पूर्ण सांख्यिक व्यंजक है।

अतः

$$f(x)\equiv(x-\alpha_1)\ (x-\alpha_2)\ f_2(x). \tag{4}$$

इसी प्रकार की कृति से प्राप्त होगा कि

$$f(x)\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \ldots\ldots(x-\alpha_n)f_n(x), \tag{5}$$

जब कि $f_n(x)$ की कोटि $n-n$, अर्थात् शून्य है।

संबंध (1) के दोनों पक्षों में x^n के गुणांकों को समीकृत करने पर प्राप्त होता है कि

$$f_n(x)=1. \tag{6}$$

अतएव

$$f(x) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n). \qquad (7)$$

इससे यह स्पष्ट है कि समीकरण $f(x)=0$ के यथार्थतः n मूल α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$ हैं। यह मूल, वास्तविक अथवा काल्पनिक, समान अथवा असमान हो सकते हैं।

उपप्रमेय : (i) *यदि समीकरण*

$$F(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

के मूल $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ *हैं, तो*

$$F(x) \equiv a_0 (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n).$$

(ii) *यदि एक n कोटि का पद $f(x)$, x के n से अधिक मान के लिए शून्य हो जाय, तो वह बहुपद शून्य के सर्वसमतः बराबर होगा।*

(iii) *यदि x में दो बहुपद, जिसमें से प्रत्येक nवीं कोटि का है, x के n से अधिक मान के लिए बराबर हो, तो बहुपद सर्वसमतः बराबर होंगे, अर्थात् एक बहुपद में x की प्रत्येक कोटि का गुणांक दूसरे बहुपद के संगत गुणांक के बराबर होगा।*

(3) *यदि $f(x)$ एक बहुपद, a और b वास्तविक, तथा $f(a)$ और $f(b)$ में से एक धन और दूसरा ऋण चिन्ह का हो, तो समीकरण $f(x)=0$ का कम से कम एक मूल a और b के मध्य होगा।*

हमें ज्ञात है कि बहुपद $f(x)$, x का एक सतत फलन है। अतः जब x, a से b तक के समस्त मान द्वारा पारित होता है, $f(x)$ भी $f(a)$ से $f(b)$ तक के समस्त मान द्वारा पारित होता है। परंतु $f(a)$ और $f(b)$ में से एक धन और दूसरा ऋण है। अतः a और b के मध्य के कम से कम x के एक मान c के लिए $f(x)$ शून्य हो जायगा और तब c वांछित मूल होगा।

(4) *विषम कोटि प्रत्येक समीकरण का कम से कम एक वास्तविक मूल होता है जिसका चिन्ह अंतिम पद के चिन्ह से अभिमुख होता है।*

कल्पना करो कि समीकरण

$$f(x) \equiv x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + p_{n-1}x + p_n = 0$$

है।

स्पष्टतया

$$f(0)=p_n\ ;\ f(+\infty)=\infty\ ;\ f(-\infty)=-\infty.$$

यदि p_n धन है, तो $f(0)$ धन और $f(-\infty)$ ऋण है। अतः अनुच्छेद 12·33 से $x=-\infty$ और $x=0$ के मध्य एक मूल होगा जिसका स्पष्टतया चिन्ह ऋण होगा।

यदि p_n ऋण है, तो $f(0)$ ऋण और $f(\infty)$ धन है। अतः (3) से $x=0$ और $x=\infty$ के मध्य एक धन मूल होगा।

यह प्रमेय को प्रमाणित करता है।

(5) *सम कोटि के प्रत्येक समीकरण के जिसका अंतिम पद ऋण है, कम से कम दो वास्तविक मूल, एक धन और दूसरा ऋण, होते हैं।*

यहाँ $f(-\infty)$ धन, $f(0)$ ऋण, $f(+\infty)$ धन हैं, क्योंकि n सम है और अतएव $x=+\infty$ तथा $x=-\infty$ दोनों के लिए x^n धन है। अतः (3) से समीकरण का कम से कम एक मूल $x=0$ और $x=+\infty$ के मध्य होगा।

(6) *यदि $f(x)$ समस्त गुणांक वास्तविक हैं, और $\alpha+i\beta$ समीकरण $f(x)=0$ का एक मूल है, तो $\alpha-i\beta$ भी एक मूल होगा।*

कल्पना करो कि $f(x)$ को

$$(x-\overline{\alpha+i\beta})\ (x-\overline{\alpha-i\beta})=\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}$$

से भाग करने पर भागफल $Q(x)$ और शेषफल, जो कि प्रथम से उच्च कोटि नहीं हो सकता, R_1x+R_2 है। यदि R_1 और R_2 वास्तविक संख्या हैं; तो

$$f(x)\equiv\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}\ Q(x)+R_1x+R_2.$$

इसमें $x=\alpha+i\beta$ प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$0\equiv0+R_1(\alpha+i\beta)+R_2.$$

दक्षिण पक्ष के वास्तविक और काल्पनिक भागों को पृथकतः शून्य के बराबर समीकृत करने पर प्राप्त होता है

$$R_1\alpha+R_2=0,$$
$$R_1\beta=0.$$

इसमें β शून्य नहीं हो सकता क्योंकि तब मूल वास्तविक हो जाएंगे। अतः $R_1=0$ और $R_2=0$।

अतएव $(x-\alpha)^2+\beta^2$ व्यंजक $f(x)$ का एक गुणनखंड, अर्थात्, $x-(\alpha+i\beta)$ और $x-(\alpha-i\beta)$ व्यजक $f(x)$ के दो गुणनखंड हैं। इससे यह विदित होता है कि दोनों, $\alpha+i\beta$ और $\alpha-i\beta$, समीकरण $f(x)=0$ के मूल हैं।

(7) *यदि समीकरण $f(x)=0$ के गुणांक परिमेय और एक मूल $a+\sqrt{b}$ है, तो $a-\sqrt{b}$ भी समीकरण का मूल होगा।*

इसको पूर्वोक्त प्रमेय को भाँति प्रमाणित किया जा सकता है

(8) *किसी समीकरण $f(x)=0$ के धन मूल $f(x)$ के पदों में चिन्ह परिवर्तन ($+$ से $-$ को और $-$ से $+$ को) से अधिक नहीं हो सकते और ऋण मूल $f(-x)$ के पदों में चिन्ह परिवर्तन ($+$ से $-$ को और $-$ से $+$ को) से अधिक नहीं हो सकते।*

इस नियम को दकार्त का चिन्ह-नियम कहते हैं।

कल्पना करो कि $f(x)$ के पदों को यादृच्छिक लेने पर उनके चिन्ह निम्नांकित हैं:

$$+ + - + - + - - .$$

स्पष्टतया इसमें पाँच चिन्ह परिवर्तन हैं। अब यदि हम समीकरण को $x-\alpha$ से गुणा करें, जब कि α कोई धन संख्या है, तो गुणन में पदों के चिन्ह निम्नांकित व्यवस्था के अनुसार होंगे:

$$\begin{array}{l} + + - + - + - - \\ + - \\ \hline + + - + - + - - \\ \quad\; - - + - + - + + \\ \hline + \pm - + - + - \pm + \end{array}$$

गुणनफल के संदिग्ध चिन्ह $\pm$ और $\mp$ धन $(+)$ और $(-)$ दोनों हो सकते हैं। यह पदों के संख्यात्मक मान पर निर्भर रहेगा।

यह निरीक्षण से स्पष्ट है कि गुणनफल में चिन्ह परिवर्तन की संख्या न्यूनतम होगी यदि संदिग्ध चिन्ह अनुवर्ती चिन्ह में बदल दिए जायें। उस स्थिति में गुणनफल के पदों के चिन्ह निम्नांकित होंगे:

$$+ + - + - + - - +,$$

इस व्यवस्था में चिन्ह परिवर्तन की संख्या 6 है जो कि $f(x)$ की चिन्ह परिवर्तन को संख्या से एक अधिक है। अतः यह अनुगमनित होता है कि धन मूल α के संगत गुणनफल $x-\alpha$ से $f(x)$ को गुणा करने पर चिन्ह परिवर्तन की संख्या कम से कम एक बढ़ जाती है।

अब समीकरण $f(x)=0$ पर विचार करो। कल्पना करो कि इसके m मूल धन और शेष $n-m$ मूल ऋण, शून्य अथवा काल्पनिक हैं; तो हम लिख सकते हैं कि

$$f(x)\equiv(x-\alpha_1)\ (x-\alpha_2)\ldots\ldots\ldots(x-\alpha_m)\ F(x).$$

व्यंजक $F(x)$ में चिन्ह-परिवर्तन हो सकता है अथवा नहीं हो सकता है परन्तु उसको $(x-\alpha_1)$, $(x-\alpha_2),\ldots,$ $(x-\alpha_m)$ से गुणा करने पर उसकी चिन्ह-परिवर्तन संख्या में कम से कम m की वृद्धि हो जाती है। इस कारण $f(x)$ में चिन्ह-परिवर्तन की संख्या कम से कम m है।

अतः $f(x)=0$ में धन मूलों की संख्या $f(x)$ में चिन्ह-परिवर्तन की संख्या से अधिक नहीं हो सकती।

पुनः, यदि

$$f(x)=(x-\alpha)\ (x-\beta)\ (x-\gamma)\ldots\ldots\ldots,$$

तो $$f(-x)=(-)^n\ (x+\alpha)\ (x+\beta)\ (x+\gamma)\ldots\ldots\ldots.$$

अतः $f(-x)=0$ के मूल $-\alpha, -\beta, \ldots$ हैं, अर्थात, संख्यानुसार $f(x)=0$ के मूल के बराबर परंतु अभिमुख चिन्ह के हैं। अतएव $f(x)=0$ के ऋण मूलों की संख्या $f(-x)=0$ के धन मूलों की संख्या के बराबर है और इस कारण $f(-x)$ में चिन्ह-परिवर्तन की संख्या से अधिक नहीं हो सकती।

उपप्रमेय : *यदि किसी n कोटि के समीकरण के दकार्त के चिन्ह-नियम द्वारा ज्ञात किए गए धन और ऋण मूल की संख्या n' से अधिक न हो, जब कि $n'<n$, तो $f(x)=0$ के काल्पनिक मूल की न्यूनतम संख्या $n-n'$ है।*

(9) *किसी समीकरण $f(x)=0$ का rवीं कोटि का बहल मूल समीकरण $f'(x)=0$ का $(r-1)$वीं कोटि का बहल मूल होता है।*

यदि समीकरण $f(x)=0$ का α मूल rवीं कोटि का बहुल मूल है, तो

$$f(x) = (x-\alpha)^r (x-\beta)\ (x-\gamma) \ldots\ldots.$$

अवकलन करने पर

$$f'(x) = r(x-\alpha)^{r-1}(x-\beta)\ (x-\gamma)\ldots$$
$$+\ (x-\alpha)^r \frac{d}{dx} \{ (x-\beta)\ (x-\gamma)\ \ldots \},$$

अतः $x-\alpha$ समीकरण $f'(x)=0$ का $(r-1)$ वां कोटि का बहुल मूल है।

समीकरण $f'(x)=0$ को $f(x)=0$ का प्रथम व्युत्पन्न समीकरण कहते हैं। इसी भाँति $f''(x)=0$, $f'''(x)=0$, इत्यादि को द्वितीय, तृतीय, इत्यादि व्युत्पन्न समीकरण कहते हैं।

11·31. उदाहरण : (i) *दिखाओ कि समीकरण $x^3-7x+2=0$ का एक मूल ऋण, एक 0 और 1 के मध्य और एक अन्य 1 से बड़ा है।*

यहाँ $f(-\infty)$ ऋण, $f(0)$ धन, $f(1)$ ऋण और $f(+\infty)$ धन है। अतः एक मूल ऋण, एक 0 और 1 के मध्य और एक अन्य 1 से बड़ा है।

(ii) *यदि समीकरण*

$$x^4+2x^3-16x^2-22x+7=0$$

का एक मूल $2+\sqrt{3}$ है, तो समीकरण को हल करो। [मैसूर, 1934]

समीकरण का एक मूल $2+\sqrt{3}$ है, और

$$f(x) = x^4+2x^3-16x^2-22x+7$$

के सब गुणांक परिमेय हैं; इस कारण $2-\sqrt{3}$ भी एक मूल है। अतः

$$(x-2-\sqrt{3})\ (x-2+\sqrt{3}) = (x-2)^2-3 = x^2-4x+1$$

निर्दिष्ट समीकरण के वामपक्ष का एक गुणनखंड है। इससे भाग करने पर समीकरण

$$x^2+6x+7=0$$

हो जाता है, जिसको हल करने पर प्राप्त होता है

$$x = -3\pm\sqrt{2}.$$

अतः निर्दिष्ट समीकरण के मूल $2\pm\sqrt{3}$ और $-3\pm\sqrt{2}$ हैं।

(iii) *दकार्त के चिन्ह-नियम की सहायता से समीकरण*

$$x^4+15x^2+7x-11=0$$

के मूलों का स्वरूप ज्ञात करो।

यहाँ $f(x) \equiv x^4+15x^2+7x-11$ में केवल एक चिन्ह-परिवर्तन है और अतएव इसके धन मूल एक से अधिक नहीं हैं।

पुनः, $f(-x) \equiv x^4+15x^2-7x-11$ में केवल एक चिन्ह-परिवर्तन है और अतएव [illegible] मूल, [illegible] $f(x)$ के ऋण मूल, एक से अधिक नहीं हैं।

इस प्रकार निर्दिष्ट समीकरण के दो से अधिक वास्तविक मूल नहीं हो सकते और अतएव इसके काल्पनिक मूलों की संख्या दो से कम नहीं हो सकती।

टिप्पणी: अनुच्छेद 12.35 के प्रमेय 5 से स्पष्ट है कि निर्दिष्ट समीकरण के वास्तविक मूलों की संख्या दो से कम नहीं हो सकती। अतः इस समीकरण के दो मूल वास्तविक और दो काल्पनिक हैं।

(iv) *समीकरण*

$$x^4-6x^2+8x-3=0$$

को, जिसके बहुल मूल हैं, हल करो।

[मैसूर, 1948]

यहाँ $\qquad f(x)=x^4-6x^2+8x-3,$

और $\qquad f'(x)=4x^3-12x+8.$

इनका म० स० $(x-1)^2$ है। अतः इनमें से तीन मूल 1 के बराबर हैं। $f(x)$ को $(x-1)^3$ से भाग करने पर $x+3$ प्राप्त होता है। अतः चतुर्थ मूल -3 है।

प्रश्नावली

निम्नलिखित समीकरण के धन मूलों का पता लगाओ:

1. $x^3+2x^2-23x-70=0.$

2. $x^5+x^3-8x-5=0.$

3. $x^5-4x-2=0.$

4. $x^{10}-4x^6+x^4-2x-3=0.$

5. समीकरण

$$2x^4-4x^3+11x^2-9x-26=0$$

को जिसका एक मूल $\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$ है, हल करो।

6. समीकरण

$$6x^4-13x^3-35x^2-x+3=0$$

को, जिसका एक मूल $2-\sqrt{3}$ है, हल करो।

[काशमीर, 1953]

7. दिखाओ कि समीकरण

$$2x^7-x^4+4x^3-5=0$$

में काल्पनिक मूलों की न्यूनतम संख्या 4 है।

[गोरखपुर, 1960]

8. समीकरण

$$x^9-x^5+x^4+x^2+1=0$$

के काल्पनिक मूलों की न्यूनतम सम्भव संख्या ज्ञात करो।

9. दकार्त के चिन्ह-नियम की सहायता से दिखाओ कि समीकरण

$$x^{10}-4x^6+x^4-2x-3=0$$

के अवास्तविक मूलों की न्यूनतम संख्या चार है।

[नागपुर, 1950]

10. दिखाओ कि समीकरण

$$x^6-x^5-10x+7=0$$

के दो धन और चार काल्पनिक मूल हैं।

[इलाहाबाद, 1959]

निम्नलिखित समीकरण को, जिनके बहुल मूल हैं, हल करो:

11. $x^4-9x^2+4x+12=0.$ [कर्नाटक, 1954]

12. $x^5-x^3+4x^2-3x+2=0.$

11·4. मूल तथा गुणांक में संबंध: कल्पना करो कि समीकरण

$$f(x)\equiv x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0 \quad (1)$$

के मूल $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ हैं; तो

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n$$
$$\equiv (x - \alpha_1)\ (x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n),$$
$$\equiv x^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n) x^{n-1}$$
$$-(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1} \alpha_n) x^{n-2}$$
$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n) x^{n-3}$$
$$+ \ldots + (-)^n \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n. \qquad (2)$$

सर्व-समिका (2) के दोनों पक्षो के x^{n-1}, x^{n-2}, ... के गुणांकों को समीकृत करने पर समीकरण (1) के मूल और गुणांकों में निम्नलिखित महत्वपूर्ण संबंध प्राप्त होते हैं:

$$\Sigma \alpha_1 \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = -p_1,$$
$$\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \equiv \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1} \alpha_n = p_2,$$
$$\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \equiv \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n = -p_3,$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n = (-)^n p_n,$$

अर्थात, यदि किसी समीकरण में x के उच्चतम कोटि के पद का गुणांक एक हो, तो द्वितीय पद का (-1) से गुणित गुणांक मूलों के योगफल के बराबर होता है; तृतीय पद का $(-1)^2$ से गुणित गुणांक एक बार में दो-दो मूल से रचित गुणनफल के योग के बराबर होता है; चतुर्थ पद का $(-1)^3$ से गुणित गुणांक एक बार में तीन-तीन मूल से रचित गुणनफल के योग के बराबर होता है; इत्यादि।

11·41. अनुप्रयोग: अब हम पूर्वोक्त अनुच्छेद में प्राप्त दो महत्वपूर्ण अनुप्रयोग का वर्णन करगे।

(क) ***मूलों के सममित फ़लन:*** किसी समीकरण के सब मूलो से अन्तग्रस्त फलन को उनका सममित फलन कहते हैं, जब कि किन्हीं दो मूलों के अदल-बदल से उसमें कोई परिवर्तन नहीं होता।

उदाहरणार्थ, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ और $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ किसी घन-समीकरण के तीन मूल α, β, γ के सममित फलन है; परन्तु $\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha$ सममित फलन नहीं हैं क्योंकि α, β के अदल-बदल से $\beta^2\alpha + \alpha^2\gamma + \gamma^2\beta$ प्राप्त होता है जो कि मूल फलन से भिन्न है।

किसी समीकरण के मूलों के सममित फलन के मान को सामान्यतः अनुच्छेद 12·4 के मूल तथा गुणांकों में संबंध की सहायता से निम्नलिखित उदाहरण की भाँति ज्ञात कर सकते हैं:

उदाहरण : यदि घन समीकरण

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

के मूल α, β, γ हो, तो सममित फलन

$$(a)\ \Sigma\alpha^2, \qquad (b)\ \Sigma\alpha^2\beta^2, \qquad (c)\ \Sigma\alpha^2\beta$$

का मान ज्ञात करो

[काशमीर, 1954]

(a) क्योंकि

$$(\Sigma\alpha)^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha),$$

अतएव

$$\begin{aligned}\Sigma\alpha^2 &= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2,\\ &= (\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha),\\ &= p^2-2q.\end{aligned}$$

(b) क्योंकि

$$\begin{aligned}(\Sigma\alpha\beta)^2 &= (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2\\ &= \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma),\end{aligned}$$

अतएव

$$\begin{aligned}\Sigma\alpha^2\beta^2 &= \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2,\\ &=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma),\\ &=q^2-2pr.\end{aligned}$$

(c) क्योंकि

$$\begin{aligned}&(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\ &\quad=(\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta)+3\alpha\beta\gamma.\end{aligned}$$

अतएव

$$\begin{aligned}\Sigma\alpha^2\beta &= \alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta,\\ &=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-3\alpha\beta\gamma,\\ &=-pq+3\gamma.\end{aligned}$$

(ख) **समीकरण के हल** : यदि किसी समीकरण के दो अथवा दो से अधिक मूल किसी निर्दिष्ट संबंध से जुड़े हों, तो अनुच्छेद 12·4 के मूल तथा गुणांको में

संबंध प्राःय समीकरण को हल करने अथवा समीकरण के गुणांकों में संबंध स्थापित करने में सहायक होते हैं।

उदाहरण : (i) *समीकरण*

$$x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$$

के दो मूल परिमाण में समान परंतु अभिमुख चिन्ह हैं; समस्त मूलों को ज्ञात करो।

[आन्ध्र, 1960]

कल्पना करो कि समीकरण के मूल $\alpha, -\alpha, \beta$ और γ हैं; तो

$$\beta + \gamma = 2, \quad (1)$$

$$\beta\gamma - \alpha^2 = 4, \quad (2)$$

$$-\alpha^2\beta - \alpha^2\gamma = -6, \quad (3)$$

$$-\alpha^2\beta\gamma = -21. \quad (4)$$

संबंध (1) और (3) से प्राप्त होता है

$$\alpha^2 = 3, \text{ अर्थात् } \alpha = \pm\sqrt{3}; \quad (5)$$

और तब (2) अथवा (4) से

$$\beta\gamma = 7. \quad (6)$$

संबंध (1) और (6) को हल करने पर प्राप्त होता है

$$\beta = 1 + i\sqrt{6}\ ,\ \gamma = 1 - i\sqrt{6}.$$

अतः समीकरण के मूल $\pm\sqrt{3}$ और $1 \pm i\sqrt{6}$ हैं।

(ii) *समीकरण*

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$$

को, जिसके मूल समांतर श्रेढी में हैं, हल करो।

[इलाहाबाद, 1960]

कल्पना करो कि मूल $\alpha - \delta, \alpha, \alpha + \delta$ हैं; तो

$$(\alpha - \delta) + \alpha + (\alpha + \delta) = 9, \quad (1)$$

$$(\alpha - \delta)\alpha(\alpha + \delta) = 15. \quad (2)$$

संबंध (1) से $\alpha = 3$ और तब (2) से $\delta = 2$ प्राप्त होता है।

अतः वाँछित मूल 1, 3 और 5 हैं।

11·42. मूलों की घात के योगफल ज्ञात करना : कल्पना करो कि समीकरण $f(x)=0$ के मूल $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ हैं; तो

$$f(x) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

लघुगणकीय अवकलन से प्राप्त होता है

$$\frac{f'(x)}{(x)}=\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{x-\alpha_n}.$$

व्यंजक $\frac{1}{x-\alpha_1}$ का x^{-1} की घातांकों में विस्तार करने पर प्राप्त होता है

$$\frac{1}{x-\alpha_1}=x^{-1}(1-\alpha_1 x^{-1})^{-1},$$

$$=x^{-1}+\alpha_1 x^{-2}+\alpha_1^2 x^{-3}+\ldots+\alpha_1^n x^{-n-1}+\ldots.$$

इसी भाँति $\frac{1}{x-\alpha_2}, \frac{1}{x-\alpha_3}, \ldots\ldots$ इत्यादि का विस्तार कर योगफल लेने पर प्राप्त होता है

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=nx^{-1}+\Sigma\alpha x^{-2}+\Sigma\alpha^2 x^{-3}+\ldots+\Sigma\alpha^n x^{-n-1}+\ldots.$$

इससे स्पष्ट है कि मूलों के nवें घात का योगफल $\Sigma\alpha^n$, $f'(x)/f(x)$ के x^{-1} के घातों के विस्तार में x^{-n-1} के गुणांक के बराबर होता है।

उदाहरण : समीकरण

$$x^3-x-1=0$$

के मूलों की 6वीं घात का योगफल ज्ञात करो।

[नागपुर, 1950]

यहाँ $f(x)=x^3-x-1,$

और $f'(x)=3x^2-1.$

अतः

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3x^2-1}{x^3-x-1},$$

$$=(3x^{-1}-x^{-3})/(1-x^{-2}-x^{-3}). \qquad (1)$$

परन्तु $(1-x^{-2}-x^{-3})^{-1}$

$$=1+(x^{-2}+x^{-3})+(x^{-4}+2x^{-5}+x^{-6})$$
$$+(x^{-6}+\ldots)+\ldots\ldots,$$
$$=1+x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}+2x^{-5}+2x^{-6}+\ldots\ldots$$

अतः (1) में x^{-7}का गुणांक $3.2-1=5$ है।

अतएव मूलों की 6वीं घात का योगफल 5 है।

प्रश्नावली

यदि समीकरण $x^3+px^2+qx+r=0$ के मूल α, β, γ हों, तो मान ज्ञात करो:

1. $\Sigma 1/\alpha$. [मैसूर, 1948]
2. $\Sigma \alpha^3$. [अलीगढ़, 1952]
3. $\Sigma \alpha^3\beta$.
4. $\Sigma(\beta^2+\gamma^2)/\beta\gamma$. [पंजाब, 1953]
5. $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$. [दिल्ली, 1958]

हल करो:

6. समीकरण $x^3-3x+2=0$, जिसके दो मूल बराबर हैं।

7. समीकरण $x^3-3x^2-6x+8=0$, जिसके मूल समांतर श्रेढी में हैं। [कश्मीर, 1954]

8. समीकरण $3x^3-26x^2+52x-24=0$, जिसके मूल गुणोत्तर श्रेढी में हैं। [उस्मानियाँ, 1954]

9. समीकरण $x^4-2x^3-3x^2+4x-1=0$, जिसके दो मूल का गुणनफल 1 है।

10. समीकरण $x^3-13x^2+15x+189=0$, जिसका एक मूल किसी अन्य से 2 अधिक है। [यू० पी० सी० एस०, 1946]

11. यदि समीकरण $x^3-rx^2+qx-p=0$ के मूल हरात्मक श्रेढी में हों, तो दिखाओ कि माध्य मूल $3p/q$ है। [इलाहाबाद, 1956]

12. यदि समीकरण $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ के तीन मूल बराबर हैं, तो दिखाओ कि इनमें से प्रत्येक

$$(6c-ab)/(3a^2-8b)$$

के बराबर है। [सागर, 1949]

13. समीकरण $x^3-x-1=0$ के मूलों को 4वीं घात का योगफल ज्ञात करो। [नागपुर, 1950]

14. समीकरण $x^3-2x^2+x-1=0$ के मूलों को 4वीं घात का योगफल ज्ञात करो। [सागर, 1948]

15. समीकरण $x^4-3x^3+5x^2-12x+4=0$ के मूलों की 5वीं घात का योगफल ज्ञात करो। [नागपुर, 1949]

11·5. समीकरण के रूपांतरण : किसी समीकरण के मूलों को विना जाने, हम प्रायः एसा समीकरण ज्ञात कर सकते हैं जिसके मूल प्रथम समीकरण के मूल से किसी भांति संबंधित हों। इस प्रकार का रूपांतरण मूल समीकरण के मूलों के विवेचन में कभी-कभी सहायक होता है। अब हम कुछ महत्वपूर्ण रूपांतरण का विवेचन करेंगे।

इन विवेचन में हम यह कल्पना करेंगे कि दिया हुआ समीकरण

$$f(x) \equiv x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$$

है और इसके मूल $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ हैं। अतः

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n). \quad (1)$$

11·51. *किसी समीकरण $f(x)=0$ का एक दूसरे समीकरण में रूपांतरण करना जिसके मूल दिए हुए समीकरण के मूल के परिमाण में समान परंतु अभिमुख चिन्ह के हों।*

संबंध (1) में x को $-x$ में परिवर्तित कर दोनों पक्षों को $(-)^n$ से गुणा करने पर प्राप्त होता है

$$x^n - p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} - \dots + (-)^{n-1}p_{n-1}x + (-)^np_n \equiv (x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\dots(x+\alpha_n).$$

इस सर्वसमिका में x का मान $-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n$ रखने पर दक्षिण पक्ष शून्य हो जाता है। अतः वांछित समीकरण

$$f(-x) \equiv x^n - p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} - \dots + (-)^{n-1}p_{n-1}x + (-)^np_n = 0$$

है।

नियम : यदि समीकरण पूर्ण हो, तो सम पदों के चिन्ह में परिवर्तन कर पूर्वोक्त रूपांतरण कर सकते हैं। यदि समीकरण पूर्ण न हो, तो इसको पूर्ण बनाकर रूपांतरण करना चाहिए।

11·52. ***किसी समीकरण $f(x)=0$ का एक दूसरे समीकरण में रूपांतरण करना जिसके मूल दिए हुए समीकरण के मूल से m गुने हों।***

संबंध (1) में x को x/m में परिवर्तित कर दोनों पक्षों को m^n से गुणा करने पर प्राप्त होता है

$$x^n+mp_1x^{n-1}+m^2p_2x^{n-2}+\ldots+m^{n-1}p_{n-1}x+m^np_n$$
$$\equiv(x-m\alpha_1)(x-m\alpha_2)\ldots\ldots.(x-m\alpha_n).$$

इस सर्वसमिका में $x=m\alpha_1, m\alpha_2,\ldots,m\alpha_n$ रखने पर दक्षिण पक्ष शून्य हो जाता है। अतः वाँछित समीकरण

$$x^n+mp_1x^{n-1}+m^2p_2x^{n-2}+\ldots+m^{n-1}p_{n-1}x+m^np_n=0$$

है।

नियम : यदि समीकरण पूर्ण हो, तो द्वितीय पद से क्रमिक पदों को क्रमशः $m, m^2, \ldots, m^n$ से गुणा कर पूर्वोक्त रूपांतरण कर सकते हैं। यदि समीकरण पूर्ण न हो, तो इसको पूर्ण बनाकर रूपांतरण करना चाहिए।

जब दिए हुए समीकरण के गुणांक भिन्नात्मक होते हैं, तो पूर्वोक्त रूपांतरण बहुत लाभदायक है क्योंकि तब हम मूल समीकरण के मूलों को उपयुक्त संख्या से गुणा कर भिन्नात्मक गुणांकों से छुटकारा पा सकते हैं। इसी भाँति यदि प्रथम पद का गुणांक एक न होकर k हो, और हम इसको एक बनाना चाहें, तो दिए हुए समीकरण के मूलों को k से गुणा कर ऐसा कर सकते हैं।

11·53. ***किसी समीकरण $f(x)=0$ का एक दूसरे समीकरण में रूपांतरण करना जिसके मूल दिए हुए समीकरण के मूल के व्युत्क्रम हों।***

संबंध (1) में x को $1/x$ में रूपांतरित कर दोनों पक्षों को x^n से गुणा करने पर प्राप्त होता है

$$p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots.+p_1x+1$$
$$\equiv(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)\ldots\ldots(1-\alpha_nx).$$

इस सर्वसमिका में $x = 1/\alpha_1, 1/\alpha_2, \ldots, 1/\alpha_n$ रखने पर दक्षिण पक्ष शून्य हो जाता है। अतः वाँछित समीकरण

$$p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \ldots + p_1 x + 1$$

है।

नियम: यदि समीकरण पूर्ण हो, तो मूल समीकरण के गुणांकों को उत्क्रमिक लिख कर पूर्वोक्त रूपांतरण कर सकते हैं। यदि समीकरण पूर्ण न हो, तो इसको पूर्ण बनाकर रूपांतरण करना चाहिए।

कुछ समीकरण पूर्वोक्त रूपांतरण से अरूपांतरित रहते हैं, अर्थात x को $1/x$ में परिवर्तन करने से समीकरण में कोई रूपांतरण नहीं होता। इस प्रकार के समीकरण को व्युत्क्रम समीकरण कहते हैं। यह स्पष्ट है कि व्युत्क्रम समीकरण में आरम्भ और अंत से समदूरस्थ पद या तो (i) परिमाण और चिन्ह दोनों में बराबर होते हैं अथवा (ii) परिमाण में समान परंतु अभिमुख चिन्ह के होते हैं।

द्वितीय प्रकार का व्युत्क्रम समीकरण $x-1$ से भाग करने पर प्रथम प्रकार के व्युत्क्रम समीकरण में रूपांतरित हो जाता है।

11.54. *किसी समीकरण का एक दूसरे समीकरण में रूपांतरण करना जिसके मूल दिये हुये समीकरण के मूल से कम हों।*

संबंध (1) में x को $(x+h)$ में परिवर्तित करने पर प्राप्त होता है

$$f(x+h) \equiv \{x-(\alpha_1-h)\}\{x-(\alpha_2-h)\} \ldots \{x-(\alpha_n-h)\}.$$

इस सर्वसमिका में $x = \alpha_1 - h, \alpha_2 - h, \ldots, \alpha_n - h$ रखने पर दक्षिण पक्ष शून्य हो जाता है। अतः वांछित समीकरण

$$f(x+h) = 0$$

है।

नियम: मूल समीकरण में x के स्थान पर $x+h$ लिख कर पूर्वोक्त रूपांतरण कर सकते हैं।

शीघ्र संख्यात्मक अभिगणना के लिए हम देखते हैं कि यदि रूपांतरित समीकरण

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n \qquad (1)$$

हो, तो मूल समीकरण

$$A_0 (x-h)^n + A_1 (x-h)^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x-h) + A_n = 0 \qquad (2)$$

होगा, क्योंकि (2) में x के स्थान पर $x+h$ लिखने पर (1) प्राप्त होता है।

इससे स्पष्ट है कि यदि $f(x)$ को $(x-h)$ से भाग करें, तो शेषफल A_n और भागफल

$$A_0(x-h)^{n-1}+A_1(x-h)^{n-2}+\ldots+A_{n-1}(x-h)+A_{n-1}$$

होगा। जब इस भागफल को $(x-h)$ से भाग करते हैं, शेषफल A_{n-1} और भागफल

$$A_0(x-h)^{n-2}+A_1(x-h)^{n-3}+\ldots+A_{n-3}(x-h)+A_{n-2}$$

होगा।

इस प्रकार $f(x)$ को $x-h$ से बारम्बार भाग करने पर शेषफल क्रमशः A_n, $A_{n-1}, \ldots A_1, A_0$. हैं।

अतः रूपांतरित समीकरण $f(x+h)=0$ के गुणांक $f(x)$ को $(x-h)$ से बारम्बार भाग कर प्राप्त कर सकते हैं।

इस विधि का अनुप्रयोग संख्यात्मक समीकरण के हल में बहुतायत से करते हैं।

उपप्रमेय : वह समीकरण, जिसके मूल समीकरण $f(x)=0$ के मूल से h अधिक हों, $f(x-h)=0$ है।

11.55. यदि हमको y में एक नवीन समीकरण प्राप्त करना हो, जिसके मूल x में दी हुई समीकरण $f(x)=0$ के मूलों से $\phi(x,y)=0$ के समरूप संबंध से जुड़े हों, तो रूपांतरित समीकरण $f(x)=0$ और $\phi(x,y)=0$ में से x को निरसन कर प्राप्त कर सकते हैं, क्योंकि ऐसा करने पर जो समीकरण प्राप्त होगा वह y से संतुष्ट हो जाता है।

11.56. उदाहरण : (i) *वह समीकरण ज्ञात करो जिसके मूल समीकरण*

$$x^4+3x^3-6x^2+2x-4=0$$

के मूल के व्युत्क्रम के दुगने के बराबर है।

अनुच्छेद 11.53 से व्युत्क्रम मूल का समीकरण

$$1+3x-6x^2+2x^3-4x^4=0,$$

अर्थात्,
$$4x^4-2x^3+6x^2-3x-1=0$$

है।

अतः अनुच्छेद 11·52 (1) से दुगने मूल का समीकरण

$$4x^4 - 2 \cdot 2x^3 + 2^2.6x^2 - 2^3.3x - 2^4 = 0$$

अर्थात्,

$$x^4 - x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = 0$$

है।

(ii) समीकरण

$$x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$$

को हल करो ।

[वाराणसी, 1960]

यह द्वितीय प्रकार का व्युत्क्रम समीकरण है जिसका एक मूल $x = 1$ है। इसको $x - 1$ से भाग करने पर प्रथम प्रकार का व्युत्क्रम समीकरण

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0 \qquad (1)$$

प्राप्त होता है।

x^2 से भाग कर $x + 1/x = y$ प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$y^2 - 4y + 3 = 0,$$

अथवा

$$(y - 1)(y - 3) = 0.$$

अतः

$$y = x + \frac{1}{x} = 1,$$

$$y = x + \frac{1}{x} = 3.$$

इनको हल करने पर प्राप्त होता है

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i, \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

अतएव वांछित मूल

$$1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

हैं

(iii) समीकरण

$$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 15x^2 + 20x - 15 = 0$$

के मूल को 2 से कम करो ।

[पंजाब, 1937]

$x-2$ से पुनरावृत्त भाग करने पर प्राप्त होता है

1	−3	−2	15	20	−15
	2	−2	−8	14	68
	−1	−4	7	34	53
	2	2	−4	6	
	1	−2	3	40	
	2	6	8		
	3	4	11		
	2	10			
	5	14			
	2				
	7				

अतः रूपांतरित समीकरण

$$x^5+7x^4+14x^3+11x^2+40x+53=0$$

है।

व्याख्या : दिए हुए बहुपद के गुणांक प्रथम रेखा में लिखे हैं। $x-2$ से भाग करने पर 53 शेषफल और $x^4-x^3+7x+34$ भागफल प्राप्त होता है; $x-2$ से पुनः भाग करने पर 40 शेषफल और x^3+x^2-2x+3 भागफल प्राप्त होता है; इत्यादि। क्रमिक शेषफल 53,40,11,14,7 रूपांतरित समीकरण के अंत से गुणांक हैं।

पूर्वोक्त विधि को संश्लेषात्मक भाजन कहते हैं। इसके अनुप्रयोग से पहले x^5 के गुणांक को एक करना आवश्यक नहीं।

(iv) *समीकरण*

$$x^3+6x^2-7x-4=0$$

में से द्वितीय पद निरसन करो।

यदि हम इस समीकरण के मूल को h से कम करें, तो रूपांतरित समीकरण

$$(x+h)^3+6(x+h)^2-7(x+h)-4=0,$$

अथवा $x^3+(3h+6)x^2+(3h^2+12h-7)x+h^3+6h^2-7h-4=0$

है। अब यदि $3h+6=0$, अर्थात् $h=-2$ लें, तो द्वितीय पद शून्य हो जाता है। अतः वांछित रूपांतरण समीकरण

$$x^3-19x+26=0$$

है।

(v) यदि समीकरण

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

के मूल α, β, γ हों, तो वह समीकरण ज्ञात करो जिसके मूल $\beta+\gamma, \gamma+\alpha, \alpha+\beta$ हैं। [पंजाब, 1949]

कल्पना करो कि $y=\beta+\gamma$; तो

$$y=\alpha+\beta+\gamma-\alpha=-p-\alpha,$$

अर्थात् $\alpha=-(p+y)$.

परन्तु α दिए हुए समीकरण का एक मूल है, अतएव समीकरण में $\alpha=-(p+y)$ प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$-(p+y)^3+p(y+p)^2-q(y+p)+r=0,$$

अर्थात्, $$y^3+2py^2+(p^2+q)y+(pq-r)=0.$$

प्रश्नावली

1. समीकरण ज्ञात करो जिनके मूल निम्नलिखित समीकरण के मूल के परिमाण में समान परंतु अभिमुख चिन्ह के हैं:

(i) $x^3-5x^2-7x+3=0,$

(ii) $x^5-x^2+x-3=0,$

(iii) $x^7+3x^5+x^3-x^2+7x+2=0.$

2. वह समीकरण ज्ञात करो जिसके मूल समीकरण

$$x^3+2x^2-4x+1=0,$$

के मूल के तिगुने हैं।

3. समीकरण

$$5x^3+3x^2+10x-100=0,$$

का रूपांतरण एक ऐसे समीकरण में करो जिसका अग्रग गुणांक एक और शेष गुणांक पूर्ण संख्या हों।

4. हल करो:

(i) $x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0,$ [नागपुर, 1953]

(ii) $x^4-5x^3+7x^2-5x+1=0,$ [त्रावणकोर, 1944]

(iii) $6x^6-25x^5+31x^4-31x^2+25x-6=0.$ [मैसूर, 1951]

5. एक समीकरण ज्ञात करो जिसके मूल समीकरण

$$x^4+x^3-3x^2-x+2=0$$

के प्रत्येक मूल में से 3 घटाने पर प्राप्त मूल के बराबर हैं ।

[इलाहाबाद, 1956]

6. समीकरण

$$2x^4-x^3-2x^2+5x-1=0$$

के मूलों को 3 से कम करो।

7. समीकरण

$$x^3-6x^2+4x-7=0$$

का रूपांतरण एक ऐसे समीकरण में करो जिसमें द्वितीय पद लुप्त हो।

[दिल्ली, 1958]

8. समीकरण

$$x^4-4x^3-18x^2-3x+2=0$$

का एक दूसरे में रूपांतर करो जिसमें तृतीय पद लुप्त हो।

[इलाहाबाद, 1960]

9. द्वितीय पद को लुप्त कर समीकरण

$$x^3+6x^2+12x-19=0$$

को हल करो। [नागपुर, 1954]

10. दिखाओ कि समीकरण

$$x^4-3x^3+4x^2-2x+1=0$$

के मूल में से 1 घटा कर इसको एक व्युत्क्रम समीकरण में रूपांतरित कर सकते हैं। अतएव समीकरण को हल करो। [इलाहाबाद, 1959]

11. एक समीकरण ज्ञात करो जिसके मूल

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=0$$

के मूल के वर्ग हैं।

12. एक समीकरण ज्ञात करो जिसके मूल

$$x^3+3x^2+2=0$$

के मूल के घन हैं।

13. यदि समीकरण $x^3+qx+r=0$ के मूल α, β, γ हैं, तो समीकरण बनाओ जिनके मूल

(i) $\beta^2\gamma^2, \gamma^2\alpha^2, \alpha^2\beta^2$

(ii) $\beta\gamma/\alpha, \gamma\alpha/\beta, \alpha\beta/\gamma$

(iii) $\beta\gamma+1/\alpha, \gamma/\alpha+1/\beta, \alpha\beta+1/\gamma$

हो। [आगरा, 1958]

14. यदि समीकरण $x^3+px^2+qx+r=0$ के मूल α, β, γ हों, तो समीकरण ज्ञात करो जिनके मूल

(i) $\alpha(\beta+\gamma), \beta(\gamma+\alpha), \gamma(\alpha+\beta)$ [अलीगढ़, 1952]

(ii) $\alpha/(\beta+\gamma), \beta/(\gamma+\alpha), \gamma/(\alpha+\beta)$

हैं। [इलाहाबाद, 1959]

15. वह समीकरण ज्ञात करो जिसके मूल घन समीकरण

$$x^3+qx+r=0$$

के मूल के अन्तर के वर्ग के बराबर हैं।

11·6. ***संख्यात्मक समीरण*** : अब हम उन समीकरण के वास्तविक मूल ज्ञात करने की विधि का विवेचन करेंगे जिसमें गुणांक अक्षरों के स्थान पर दी हुई संख्याएं हैं। ऐसे समीकरण को संख्यात्मक समीकरण कहते हैं। इनके वास्तविक मूल परिमेय अथवा अपरिमेय हो सकते हैं।

11·61. ***परिमेय मूल ज्ञात करने की विधि*** : किसी समीकरण के परिमेय मूल धन अथवा ऋण, पूर्ण संख्या अथवा भिन्नात्मक हो सकते हैं।

(क) ***पूर्णसांख्यिक धनमूल*** : पूर्ण सांख्यिक धन मूलों को साधारणतया 'परीक्षण ओर चूक' विधि से ज्ञात करते हैं। इसमें अन्तग्रस्त परिश्रम को कम करने के लिए ऐसी संख्या का ज्ञान आवश्यक है जिससे विचाराधीन समीकरण के समस्त धन मूल कम हों। इस संख्या को समस्त धन मूल की उच्च सीमा कहते हैं।

उच्च सीमा ज्ञात करने की अनेक विधियाँ हैं। परंतु तनिक अभ्यास एवं साधारण बोध के अनुप्रयोग से केवल पदों के वर्गीकरण द्वारा उपयुक्त उच्च सीमा सरलता से ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण : *समीकरण*

$$x^4-2x^3+3x^2-5x+1=0$$

के धन मूल की उच्च सीमा ज्ञात करो।

समीकरण को

$$x^3(x-2)+x(3x-5)+1=0$$

के रूप में लिख सकते हैं। $x=2$ रखने पर प्रथम पद शून्य हो जाता है और x का 2 से बड़ा कोई भी मान इसको धन कर देता है। x का 2 अथवा 2 से बड़ा कोई भी

मान द्वितीय पद को धन बना देता है। तृतीय पद धन है ही। अतः 2 और 2 से बड़ी सब संख्या $f(x)$ को धन कर देगी। अतएव 2 से बड़ा कोई मूल नहीं हो सकता। अतः 2 धन मूलों की एक उच्च सीमा है।

स्पष्टतया 3,4, इत्यादि अनेक उच्च सीमा हो सकती हैं परन्तु 2 इन सबसे अधिक उपयुक्त है।

(ख) *पूर्णसांख्यिक ऋण मूल* : किसी समीकरण $f(x)=0$ के ऋण मूलों को, समीकरण $f(-x)=0$ के धन मूलों पर विचार कर, ज्ञात कर सकते हैं।

(ग) *भिन्नात्मक मूल* : किसी समीकरण $f(x)=0$ के भिन्नात्मक मूल निकालने की विधि निम्नलिखित प्रमेय पर निर्भर है :

किसी समीकरण $f(x)=0$ के, जिसके प्रथम पद का गुणांक एक और अन्य गुणांक (धन अथवा ऋण) पूर्ण-संख्या हैं भिन्नात्मक मूल नहीं हो सकते।

यदि सम्भव है तो कल्पना करो कि समीकरण

$$f(x) \equiv x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0 \qquad (1)$$

का, जिसमें $p_1, p_2, \dots$ पूर्ण संख्या हैं, एक मूल भिन्न a/b है जो कि अपने न्यूनतम पदों में है। अतः

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + p_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots + p_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right) + p_n = 0. \quad (2)$$

समीकरण (2) को b^{n-1} से गुणा कर पक्षांतरण करने से प्राप्त होता है

$$-a^n/b = p_1a^{n-1} + p_2a^{n-2}b + p_{n-1}ab^{n-2} + p_nb^{n-1} \qquad (3)$$

क्योंकि परिकल्पना से a, b से भाज्य नहीं है, (3) का वाम पक्ष एक भिन्न और दक्षिण पक्ष एक पूर्ण संख्या है, जो कि असम्भव है। अतएव साध्य प्रमाणित हो जाता है।

अतः यदि किसी समीकरण के प्रथम पद के गुणांक को (भाग से) एक बनाने पर कुछ अन्य गुणांक भिन्नात्मक हो जायें, तो समीकरण के मूलों को एक उपयुक्त संख्या से गुणा कर रूपांतरित समीकरण के सब गुणांकों को पूर्ण-सांख्यिक कर लेते हैं। इस भाँति एक दिए हुए समीकरण के भिन्नात्मक मूल को ज्ञात करने के लिए रूपांतरित समीकरण के पूर्ण-सांख्यिक मूल को ज्ञात करना पर्याप्त होता है।

उदाहरण : *समीकरण*

$$x^3 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{11}{36}x - \frac{25}{72} = 0$$

को एक अन्य समीकरण में रूपान्तरित करो जिसके प्रथम पद का गुणांक एक और अन्य गुणांक पूर्णसांख्यिक हों।

निर्दिष्ट समीकरण

$$x^3-\frac{7}{3}x^2+\frac{11}{36}x-\frac{25}{72}=0$$

के मूलों को यदि हम m से गुणा करें तो प्रथम के पश्चात् क्रमिक गुणांकों को m, m^2 m^3 से गुणा करना पड़ेगा। अतः $k=6$ लेना उचित रहेगा और तब वांछित रूपांतरित समीकरण

$$x^3-14x^2+11x-75=0$$

है।

(घ) पूर्वोक्त विवेचन के आधार पर किसी समीकरण $f(x)=0$ के परिमेय मूल ज्ञात करने के लिए निम्न-लिखित विधि अपनाई जा सकती है:

सर्वप्रथम अनुच्छेद 1·39 से समीकरण $f(x)=0$ के बहुल मूल ज्ञात करो और $f(x)$ को बहुल मूल के संगत गुणनखंड $(x-a)^r$ से भाग करो। इस प्रकार प्राप्त नवीन समीकरण के अग्रग गुणांक को एक और अन्य गुणांको को पूर्ण-सांख्यिक बनाओ। अब पक्षांतरित समीकरण के अंतिम पद का संख्यात्मक मान इस समीकरण के मूलों के गुणनफल के बराबर होगा। अतः हर एक पूर्ण सांख्यिक मूल अंतिम पद का एक गुणनखंड होगा और सम्भव धन मूल $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ अंतिम पद के उच्च सीमा से कम गुणनखंड होंगे। तत्पश्चात् प्रतिस्थापन से पता लगाओ कि कौन से मूल निर्दिष्ट समीकरण को संतुष्ट करते हैं और इस प्रकार समीकरण के धन मूल का मान ज्ञात करो। समीकरण $f(x)=0$ के ऋण मूलों को समीकरण $f(-x)=0$ के धन मूलों पर विचार कर पता लगाओ।

उदाहरण : (i) *समीकरण*

$$3x^3-2x^2-6x+4=0$$

के परिमेय मूल ज्ञात करो।

यह सरलता से प्रमाणित किया जा सकता है कि निर्दिष्ट समीकरण के बहुल मूल नहीं हैं।

इस समीकरण के मूल को 3 से गुणा करने पर रूपांतरित समीकरण

$$x^3-2x^2-18x+36=0$$

प्राप्त होता है। इसको

$$x(x-6)^2+x(10x-54)+36=0 \qquad (२)$$

के रूप में लिख सकते हैं। अतएव धन मूलों की उच्च सीमा 6 है।

क्योंकि (1) का अचर पद 36 है इसके सम्भव परिमेय मूल 1, 2, 3, 4 हैं। इनमें से केवल 2 समीकरण (1) को संतुष्ट करता है और अतः केवल 2 ही (1) का मूल है।

व्यंजक $x-2$ से (1) को भाग करने पर प्राप्त होता है

$$x^2-18=0.$$

अतः शेष मूल परिमेय नहीं हैं।

अतएव मूल समीकरण का परिमेय मूल केवल 2/3 है।

(ii) *समीकरण*

$$x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$$

परिमेय मूल ज्ञात करो।

यह प्रमाणित किया जा सकता है कि निर्दिष्ट समीकरण के बहुल मूल नहीं हैं। अब, क्योंकि

$$f(x)=x^4+2x^3-7x^2-8x+12,$$
$$=x^2(x^2-7)+2x(x^2-4)+12,$$

अतएव धन मूलों की एक उच्च सीमा 3 है।

अतः धन परिमेय मूल केवल 1 अथवा 2 हैं। परीक्षण से ज्ञात है कि ये दोनों समीकरण के मूल हैं।

पुनः

$$f(-x)=x^4-2x^3-7x^2+8x+12,$$
$$=x^2(x-4)(x+2)+x^2+8x+12.$$

अतएव $f(-x)=0$ के धन मूलों की एक उच्च सीमा 4 है। परीक्षण से ज्ञात होगा 1, 2, 3 में से केवल 2 और 3 समीकरण $f(-x)=0$ के मूल हैं।

अतः निर्दिष्ट समीकरण के मूल 1, 2, −2 −3 हैं।

1·62. अपरिमेय मूलज्ञात करने की विधि : हमने पूर्वगत अनुच्छेद में परिमेय मूल ज्ञात करने की विधि का विवेचन किया था। अब हम अपरिमेय मूल ज्ञात करने की दो महत्वपूर्ण विधियों का वर्णन करेंगे।

(क) *न्यूटन की सन्निकटत विधि* : कल्पना करो कि समीकरण $f(x)=0$ के एक मूल का सन्निकट मान a और शुद्ध मान $a+y$ है; तो

$$f(a+y)=0. \qquad (1)$$

परंतु टेलर-प्रमेय से

$$f(a+h)=f(a)+hf(a)+y \text{ की उच्च घात।} \qquad (2)$$

y को दो तथा दो से अधिक घात की उपेक्षा करने पर (जो कि तर्क संगत है क्योंकि स्पष्टतया a की अपेक्षा y अति लघु है) (1) और (2) से प्राप्त होता है

$$f(a)+yf'(a)=0$$

अथवा
$$y=-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

अतः $a-f(a)/f'(a)$
समीकरण $f(x)=0$ का a की अपेक्षा अधिक शुद्ध मान है।

इस विधि की पुनरावृत्ति से समीकरण $f(x)=0$ के सन्निकट मूल a का मान वांछित शुद्धता तक ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण : *न्यूटन की सन्निकटन-विधि से समीकरण*

$$x^3-2x-5=0$$

का वास्तविक मूल ज्ञात करो। [अलीगढ़ 1949]

यहाँ $f(x)=x^3-2x-5,$
और $f'(x)=3x^2-2.$

समीकरण के वास्तविक मूल का सन्निकटन मान 2 है। अतः यदि $2+h_1$ शुद्ध मान है, तो

$$h_1=-f(2)/f'(2)=1/10=0.1 \text{ सन्निकटतः।}$$

पुनः, यदि अब मूल का शुद्ध मान $2.1+h_2$ लें, तो

$$h_2=-f(2.1)/f'(2.1)=-0.061/11.23,$$
$$=-0.0054 \text{ सन्निकटतः।}$$

अतः मूल का सन्निकटन मान 2.0946 है।

(ख) *हॉर्नर की विधि* : न्यूटन की विधि की भाँति हॉर्नर की विधि भी क्रमिक-सन्निकटीकरण की विधि है। इसका अनुप्रयोग दोनों प्रकार के मूल परिमेय और

अपरिमेय को ज्ञात करने में कर सकते हैं। परंतु जब कि न्यूटन की विधि द्वितीय अथवा तृतीय सन्निकटन के पश्चात् बहुत अधिक परिश्रममय हो जाती है, हॉर्नर की विधि में तुलनात्मक रूप से कम परिश्रम लगता है।

हॉर्नर की विधि में अन्तर्ग्रस्त मुख्य सिद्धांत मूल के क्रमिक अंकों द्वारा मूल का क्रमिक ह्रास है। मूल का अंक 2 करके ज्ञात करते हैं; सर्वप्रथम पूर्ण-सांख्यिक भाग, यदि हो; और तब सांत दशमलव तक, यदि सम्भव हो, अथवा किन्हीं वांछित स्थानों तक, यदि दशमलव असांत हो। उदाहरणार्थ, यदि वांछित मूल 14.2644 हो, तो समीकरण के मूल का अंक 10, 4, ·2, ·06, ·004, ·0004 द्वारा क्रमिक ह्रास करते हैं। मूल के प्रत्येक ह्रास के बाद दशमलव बिन्दु-प्रयोग बचाने के लिए मूलों को 10 से गुणा करते हैं।

हॉर्नर की विधि में समीकरण के प्रत्येक रूपांतरण के पश्चात् मूल का पता लगाना पड़ता है। यदि यह साधारण विधि से किया जाये, तो अधिक परिश्रममय होता है; इस कारण परीक्षण-भाजक के सिद्धांत का प्रयोग करते हैं और रूपांतरित समीकरण के अंतिम गुणांक को परीक्षण-भाजक, अर्थात्, अंतिम-से-प्रथम गुणांक से भाग कर मूल प्राप्त करते हैं। परंतु इस सिद्धांत का तब ही प्रयोग करना चाहिए जब कि अंतिम दो गुणांक अभिमुख चिन्ह के और शेष गुणांकों की अपेक्षा पर्याप्त बृहत हों। साधारणतया इसका प्रयोग मूल की द्वितीय अथवा तृतीय अंक (और कभी-कभी प्रथम अंक) के पश्चात् सम्भव हो जाता है और जब एक बार होने लगता है तो विधि की समाप्ति तक जारी रहता है।

यदि इस विधि की कृति में त्रुटि हो जाये, तो सरलता से पहिचानी जा सकती है क्योंकि समीकरण के प्रथम रूपांतरण के पश्चात् अंतिम गुणांक का चिन्ह अपरिवर्तित रहना चाहिए। यदि किसी स्थान पर अंतिम गुणांक के चिन्ह में रूपांतरण हो जाये, तो इसका यह अर्थ है कि उस स्थान पर मूल अधिकतर संख्या से घट गए हैं।

उदाहरण : *हॉर्नर की विधि से समीकरण*

$$x^3+x^2+x-100=0$$

का धन मूल दशमलव के चार स्थानों तक शुद्ध ज्ञात करो।

[इलाहाबाद, 1956]

दकार्त के चिन्ह-नियम से समीकरण

$$f(x) = x^3 + x^2 + x - 100 = 0 \qquad (1)$$

का एक से अधिक धन मूल नहीं हो सकता। इस धन मूल का मान 4 और 5 के मध्य होगा क्योंकि $f(4)$ धन और $f(5)$ ऋण है। अतः मूलो में 4 घटाते हैं और तब रूपांतरित समीकरण

$$x^3 + 13x^2 + 57x - 16 = 0 \qquad (2)$$

प्राप्त होता है।

समीकरण (2) के धन मूल का मान 0 और 1 के मध्य है। अतः इसके मूल को 10 से गुणा करते हैं और तब रूपांतरित समीकरण

$$x^3 + 130x^2 + 5700x - 16000 = 0 \qquad (3)$$

प्राप्त होता है।

क्योंकि इस समीकरण के अंतिम दो गुणांक अभिमुख चिन्ह के हैं और शेष गुणांकों की अपेक्षा पर्याप्त बृहत हैं, हम परीक्षण-भाजक के सिद्धांत का अनुप्रयोग कर सकते हैं।

अब अंतिम पद को अंतिम-से-प्रथम पद से भाग करने पर भागफल 2 प्राप्त होता है और समीकरण (3) के धन मूल का मान 2 और 3 के मध्य है। अतः मूलों में से 2 घटाते हैं और तब रूपांतरित समीकरण

$$x^3 + 136x^2 + 6232x - 4072 = 0 \qquad (4)$$

प्राप्त होता है

इस समीकरण के धन मूल का मान 0 और 1 के मध्य है। अतः इसके मूलों को 10 से गुणा करने पर रूपांतरित समीकरण

$$x^3 + 1360x^2 + 623200x - 4072000 = 0 \qquad (5)$$

प्राप्त होता है।

परीक्षण-भाजन के सिद्धांत से ज्ञात होता है कि इसके धन मूल का मान 6 और 7 के मध्य है। अतः मूलो में से 6 घटाने पर रूपांतरित समीकरण

$$x^3 + 1378x^2 + 639628x - 283624 = 0 \qquad (6)$$

प्राप्त होता है।

समीकरण (6) के धन मूल का मान 0 और 1 के मध्य है। अतः (6) के मूलों को 10 से गुणा करते हैं; तब परीक्षण-भाजन के सिद्धांत से ज्ञात होता है कि

रूपांतरित समीकरण के मूल 4 और 5 के मध्य है। अतः मूलों में से 4 घटाने पर रूपांतरित समीकरण

$$x^3+13792x^2+64073088x-27552256=0 \qquad (7)$$

प्राप्त होता है।

पूर्वोक्त की भाँति (7) के साथ क्रिया करने पर परीक्षण-भाजन पुनः 4 आता है। अतः निर्दिष्ट समीकरण का दशमलव के चार स्थानों तक शुद्ध धन मूल 4·2644 है।

पूर्वोक्त विधि को संहत रूप में निम्नांकित प्रकार से अभिव्यक्त कर सकते हैं:

1	1	1	−100
	4	20	84
	5	21	−16000
	4	36	11928
	9	5700	−4072000
	4	264	3788376
	130	5964	283624000
	2	268	256071744
	132	623200	−27552256
	2	8196	
	134	631396	
	2	8232	
	1360	63962800	
	6	55136	
	1366	64017936	
	6	55152	
	1372	64073088	
	6		
	13780		
	4		
	13784		
	4		
	13788		
	4		
	13792		

यदि पूर्वोक्त उदाहरण में समीकरण के मूल का मान दशमलव के कई स्थानों तक शुद्ध निकालना हो तो रूपांतरित समीकरण के गुणांक के बराबर बढ़ते रहने के कारण यह विधि अति कष्टकारी हो जाती है। इस कठिनाई को दूर करने के लिए हम किसी विशेष स्थान के पश्चात् आकुंचन-विधि का प्रयोग करते हैं अर्थात् गुणांको में शून्य लगाने के स्थान पर हम परीक्षण भाजन के दक्षिण से एक अंक, उसके पूर्वगामी गुणांक से दो अंक, इसके पूर्वगामी गुणांक से तीन अंक, इत्यादि काट देते हैं। इसके परिणाम स्वरूप मूल 10 से गुणित हो जाते हैं और साथ उन अंकों की उपेक्षा हो जाती है जिनका मूल को ज्ञात करने में तुलनात्मक रूप से कम प्रभाव होता है। आकुंचन-विधि किस स्थान से आरम्भ की जाये यह इस बात पर निर्भर रहता है कि दशमलव के कितने स्थानों तक शुद्ध मूल का मान निकालना है, क्योंकि आकुंचन-विधि के प्रारम्भ के पश्चात्, ज्ञात अंकों के अतिरिक्त, अधिक से अधिक परीक्षण-भाजन के अंकों से एक कम अंक तक ज्ञात कर सकते हैं। जब केवल दो गुणांक रह जाते हैं, तो यह विधि साधारण आकुंचन-भाग में परिवर्तित हो जाती है।

उदाहरण : *समीकरण*

$$x^3 + x^2 + x - 100 = 0$$

का धन मूल दशमलव के नौ स्थानों तक शुद्ध ज्ञात करो।

इस समीकरण के प्रथम चार रूपान्तरण न्यूटन की सन्निकटन विधि से निकालने पर दशमलव के 3 स्थानों तक शुद्ध धन मूल 4.264 प्राप्त होता है। अब हम चतुर्थ रूपांतरण से प्राप्त गुणांको से प्रारम्भ कर आकुंचन-विधि के प्रयोग से वाँछित मान निम्न प्रकार से ज्ञात करते हैं :

1	13792	64073088	−27552256
		552	25631440
		6407860	−1920816
		552	1281688
	137	6408412	−639128
		3	576762
		640844	−62366
		3	57676
	1	640847	−4690
		64084	4386
		6408	−204
		640 ·	192
		64	−12

प्रश्नावली

समीकरण के धन पदों की सीमा पदों के वर्गीकरण द्वारा ज्ञात करो:

1. $x^4 - 5x^3 + 40x^2 - 8x + 23 = 0.$

2. $x^5 + 3x^4 + x^3 - 8x^2 - 51x + 18 = 0.$

निम्नलिखित समीकरण में से मूलों को उपयुक्त संख्या से गुणा कर भिन्नात्मक गुणांक हटाओ:

3 $x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{12}x^2 - \frac{13}{900} = 0.$

4. $x^4 - \frac{4}{15}x^3 - \frac{11}{36}x^2 + \frac{31}{300}x + \frac{23}{3600} = 0.$

परिमेय मूल ज्ञात करो:

5. $x^3 - 9x^2 + 22x - 24 = 0.$

6. $2x^3 - 31x^2 + 112x + 64 = 0.$

7. $x^4 + 9x^3 + 12x^2 - 80x - 192 = 0.$

परिमेय मूल ज्ञात करो:

8. $2x^4 + x^3 - 5x^2 - 2x + 2 = 0.$

9. $x^5 - 4 = 0.$

10. $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 10x - 4 = 0.$

11. हॉर्नर की विधि से समीकरण

$$x^3 - 4x - 7 = 0$$

के वास्तविक मूल दशमलव के दो स्थानों तक शुद्ध ज्ञात करो। [रंगून 1950]

12. समीकरण

$$x^3 - 2 = 0$$

का धन मूल दशमलव के तीन स्थानों तक शुद्ध ज्ञात करो। [लखनऊ 1947]

13. हॉर्नर की विधि से समीकरण

$$20x^3 - 121x^2 - 121x - 141 = 0$$

का धन मूल, जो कि 7 और 8 के मध्य हैं, ज्ञात करो। [लखनऊ 1956]

14. समीकरण

$$x^4 - 12x + 7 = 0$$

के 2 और 3 के मध्य के मूल का मान दशमलव के पाँच स्थानों तक शुद्ध ज्ञात करो।
(आई० ए० एस०, 1959)

विविध प्रश्नावली

1. समीकरण

$$x^4 - 33^3 - 22x^2 + 62x - 15 = 0.$$

को हल करो यदि $2 + \sqrt{3}$ इसका एक मूल है। [मैसूर, 1934]

2. समीकरण

$$x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 2 = 0.$$

को, जिसका एक मूल $-1 + \sqrt{(-1)}$ है, हल करो। [वाराणसी, 1949]

3. दिखाओ कि समीकरण

$$x^5 + x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0.$$

के कम से कम एक युगल काल्पनिक मूल हैं। [कलकत्ता, 1960]

4. दिखाओ कि समीकरण $x^n + 1 = 0$ का, जब n सम है, कोई वास्तविक मूल नहीं है, परंतु जब n विषम है, एक वास्तविक मूल -1 है और इसके अतिरिक्त कोई अन्य वास्तविक मूल नहीं है।

5. दिखाओ कि समीकरण

$$\frac{A^2}{x-a} + \frac{B^2}{x-b} + \frac{C^2}{x-c} + \ldots + \frac{K^2}{x-k} = x - m$$

के, जब कि $a, b, c, \ldots, k$ एक दूसरे से भिन्न संख्या हैं, काल्पनिक मूल नहीं हो सकते। [मैसूर, 1931]

6. यदि समीकरण $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ के मूल $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ हों, तो $\Sigma \alpha^2\beta\gamma$ का मान बताओ।

7. यदि $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$ के मूल हरात्मक श्रेणी में हैं, तो दिखाओ कि

$$2q^3 = r(3pq - r).$$ [सागर, 1950]

8. यदि समीकरण

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

के मूलों में से दो का योगफल शेष दो के योगफल के बराबर है, तो सिद्ध करो कि

$$4ab = a^3 + 8c.$$ [बम्बई, 1955]

9. यदि समीकरण

$$x^4 + p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4 = 0$$

के मूलों में से दो का योगफल शून्य हो, तो दिखाओ कि

$$p_1^2p_4 - p_1p_2p_3 + p_3^2 = 0.$$ [लखनऊ प्रा०, 1950]

10. चार विन्दु O, A, B, C एक सरल रेखा में इस प्रकार से हैं कि A, B, C की O से दूरी समीकरण

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

की मूल है। यदि B सरल रेखा AC का मध्य विन्दु हो, तो दिखाओ कि

$$a^2d - 3abc + 2b^3 = 0.$$ [लखनऊ प्रा० 1953]

11. समीकरण

$$2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$$

को, जिसके मूलों में से दो का अंतर 3 है, हल करो। [सागर, 1949]

12. समीकरण

$$x^3 + x^2 + 2x + 8 = 0$$

को, जिसके मूल गुणोत्तर श्रेढी में हैं, हल करो। [मैसूर, 1953]

13. समीकरण

$$3x^3 - 22x^2 + 48x - 32 = 0$$

को हल करो, जब कि इसके मूल हरात्मक श्रेणी में हैं। [नागपुर, 1949]

14. समीकरण

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$$

को हल करो, जब कि यह दिया है कि मूलो में से दो का गुणनफल 12 है।

15. दिखाओ कि समीकरण

$$x^5 + px^3 + qx^2 + s = 0$$

के मूलों की चौथी घात का योगफल $2p^3$ है। [मद्रास, 1954]

16. वह समीकरण ज्ञात करो जिसका प्रत्येक मूल

$$x^3 - 5x^2 + 6x - 3 = 0$$

के मूल से 1 बड़ा है। [सागर, 1948]

17. समीकरण

$$x^4+8x^3+x-5=0$$

का एक दूसरे समीकरण में रूपांतरण करो जिसमें द्वितीय पद लुप्त हो।

[कशमीर, 1954]

18. यदि α, β, γ घन समीकरण

$$x^3+qx+r=0$$

के मूल हैं, तो वह समीकरण बनाओ जिसके मूल $\beta/\gamma+\gamma/\beta, \gamma/\alpha+\alpha/\gamma$ और $\alpha/\beta+\beta/\alpha$ हैं। [आगरा, 1931]

19. यदि α, β, γ घन-समीकरण

$$x^3-p_1x^3+p_2x-p_3=0$$

के मूल हैं, तो वह समीकरण बनाओ जिसके मूल $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ हैं।

[मैसूर, 1931]

20. यदि α, β, γ समीकरण

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

के मूल हैं, तो वह समीकरण बनाओ जिसके मूल

$$\alpha-\frac{1}{\beta\gamma}, \; \beta-\frac{1}{\gamma\alpha}, \; \gamma-\frac{1}{\alpha\beta}$$

हैं।

21. यदि समीकरण

$$x^3+qx+r=0$$

के मूल α, β, γ हैं, तो वह समीकरण बनाओ जिसके मूल

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}, \; \frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}, \; \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$$

हैं। [दिल्ली, 1949]

22. यदि समीकरण $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ के दो समान मूल हैं, तो दिखाओ कि इनमें से प्रत्येक

$$(bc-ad)/2(ac-b^2)$$

के बराबर है। [अलीगढ़, 1953]

23. यदि समीकरण $x^5 - 10a^3x^2 + b^4x + c^5 = 0$ के तीन समान मूल हैं, तो दिखाओ कि

$$ab^4 - 9a^5 + c^5 = 0.$$

[नागपुर, 1954]

24. यदि

$$x^5 + qx^3 + rx^2 + t = 0$$

के दो मूल समान हैं, तो सिद्ध करो कि इनमें से एक द्विघात समीकरण

$$15rx^2 - 6q^2x + 25t - 4qr = 0$$

का मूल है। [नागपुर, 1949]

25. समीकरण

$$6x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 2 = 0$$

के परिमेय मूल ज्ञात करो। [उत्कल, 1952]

26. समीकरण

$$2x^3 - 3x - 6 = 0$$

के धन मूल चार सार्थक अंक तक ज्ञात करो। [अलीगढ़, 1950]

27. सिद्ध करो कि समीकरण $x^4 - 7x^2 + 18x - 8 = 0$ का एक मूल 0 और 1 के मध्य है। इस मूल को दशमलव के चार स्थानों तक ज्ञात करो।

[लखनऊ, 1958]

28. 9 का घन मूल दशमलव के तीन स्थानों तक शुद्ध ज्ञात करो।

[लखनऊ, 1958]

29. हॉर्नर की विधि से समीकरण $x^3 - 6x - 13 = 0$ के धन मूल दशमलव के चार स्थानों तक ज्ञात करो। [काश्मीर, 1953]

30. हॉर्नर की विधि से समीकरण $4x^3 - 13x^2 - 31x - 275 = 0$ का वह धन मूल ज्ञात करो जिसका मान 6 और 7 के मध्य हो। [अलीगढ़, 1953]

———

उत्तरमाला

पृष्ठ 6–8

1. (*i*) $x^5+10x^4y+40x^3y^2+80x^2y^3+80xy^4+35y^5$.

   (*ii*) $1-\frac{10}{x}+\frac{45}{x^2}-\frac{120}{x^3}+\frac{210}{x^4}-\frac{252}{x^5}$

   $+\frac{210}{x^6}-\frac{120}{x^7}+\frac{45}{x^8}-\frac{10}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}$.

   (*iii*) $x^6y^3+4x^{11/2}y^{7/2}+6\frac{2}{3}x^5y^4+5\frac{25}{27}x^{9/2}y^{9/2}$

   $+2\frac{26}{27}x^4y^5+\frac{64}{81}x^{7/2}y^{11/2}+\frac{64}{729}x^3y^6$.

   (*iv*) $\frac{x^3}{y^3}-\frac{6x^2}{y^2}+\frac{15x}{y}-20+\frac{15y}{x}-\frac{6y^2}{x^2}+\frac{y^3}{x^3}$.

2. (*i*) $2(x^6+15a^2x^4+15a^4x^2+a^6)$. (*ii*) 34.
   (*iii*) $2(a^5-10a^3b^2+5ab^4)$. (*iv*) $2x(16x^4-20x^2a^2+5a^4)$.

3. (*i*) 10201. (*ii*) 96059601.

4. $1088640x^6$. 5. $-120x^8y^{12}$.

6. $(-)^r\ {}^{14}C_r\ a^{14-r}b^r x^{14-r}y^r$.

7. $(-)^r\ {}^{2n}C_r(x/a)^{2n-2r}$.

8. (*i*) $199\frac{1}{9}$. (*ii*) $T_{r+1}=(-)^n\frac{(3n)!}{n!\,(2n)!}$.

9. (*i*) 252. (*iii*) $924a^6b^6$.

10. (*i*) चौथी ; 5/2. (*ii*) पाँचवीं ; $210\times256\times125\times125$.

11. 3.2^{n-1}. 12. $(n+2)2^{n-1}$.

13. $\frac{n(n+1)}{2}$. 14. $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

15. $\frac{1}{(n+1)}$. 16. $n(n-1)2^{n-2}$.

17. $1+n.2^{n}$. 18. $(n-2)2^{n-1}+1$.

19. $\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$.

पृष्ठ 16-18

1. (*i*) $1+\frac{5}{2}x+\frac{15}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3;\ -1<x<1.$

(*ii*) $\frac{1}{8}a^{-3/2}+\frac{3}{8}xa^{-5/2}+\frac{15}{16}x^2a^{-7/2}+\frac{35}{16}x^3a^{-9/2};\ -\frac{1}{2}a<x<\frac{1}{2}a.$

(*iii*) $\frac{1}{16y^4}\left[1-\frac{3}{2}\frac{x^2}{y^2}+\frac{27}{16}\frac{x^4}{y^4}-\frac{27}{16}\frac{x^6}{y^6}\right];\ x<\pm\frac{2y}{3}.$

2. (*i*) $(-)^{r-1}\ \frac{1.3.5\ldots(2r-3)}{r!}x^r.$

(*ii*) $(r+1)-\frac{b^rx^r}{a^{r+2}}.$

3. (*i*) $\frac{2^r}{3^{2r+5}}(1+15r-13r^2)$. (*ii*) $1/2^{14}$.

4. (i) $-\frac{38.39.40\ldots.56}{19!}\left(\frac{2}{3}\right)^{37}.$

(ii) नवीं ; $\frac{9.13.17.21.25.29.33.37}{(4)^{24}.8!}\cdot\frac{7^8}{5^{9/4}}.$

(iii) तीसरी ; $\frac{40960}{3^{84}}$. 6. $n+1$.

8. $\sqrt{2}$. 9. $(9/4)^{1/3}$. 10. $\sqrt[3]{5/2}$.

11. $(\frac{3}{2})^{-3/2}$ 12. $\sqrt[3]{4}$. 13. $\sqrt{27}$.

15. $\frac{1}{4}-\frac{17}{384}x$.

16. $1-\frac{x}{2}$.

17. $1-5x/8$.

18. 9·8994.

19. 2·036.

20. 0·1996.

पृष्ठ 18 – 22.

2. (i) $8x^6+36x^5+66x^4+63x^3+33x^2+9x+1$.

(ii) $x^4+8x^3+28x^2+56x+70+\frac{56}{x}+\frac{28}{x^2}+\frac{8}{x^3}+\frac{1}{x^4}$.

(iii) $a^4x^{12}+4a^3bx^{11}+2a^2(3b^2+2ac)x^{10}$.

$+4a(b^3+3abc+a^2d)x^9+(b^4+12ab^2c+12a^2bd+6a^2c^2)x^8$.

$+4(b^3c+3ab^2d+3abc^2+3a^2cd)x^7$

$+2(db^3+3b^2c^2+3a^2d^2+12abcd+2ac^3)x^6$

$+4(bc^3+3ac^2d+3b^2cd)x^4+4d(c^3+3dbc+d^2a)x^3$

$+2d^2(3c^2+2db)x^2+4cd^3x+d^4$.

3. (i) $1+\frac{1}{2}x+\frac{7}{8}x^2+\frac{17}{16}x^3+\ldots\ldots\ldots$

(ii) $1-x+x^3-\ldots$

(iii) $1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+\cdots$

(iv) $c^{-1/2}\left[1-\frac{b}{2c}x+\left(\frac{3b^2}{8c^2}-\frac{a}{2c}\right)x^2-\left(\frac{5}{16}\frac{b^3}{c^3}-\frac{3ab}{c^2}\right)x^3+\ldots\right]$.

4. $1+\frac{13}{6}x+\frac{55}{72}x^2$.

5. 9.

8. $\frac{n^2(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}$.

22. $\frac{19}{8}$.

23. $4\sqrt[3]{2}-2$.

24. $\frac{1}{24}$.

27. $\frac{3.5.7\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n-2)}$.

पृष्ठ 27–29

1. $1 - ix - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$; $\frac{(-)^r i^r x^r}{r!}$.

2. 1·6487; ·3679.

3. $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\ldots$

4. $2\left(1 + \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} + \frac{2^6x^6}{6!} + \ldots\ldots\right)$.

5. $\left\{\frac{a}{r(r-1)} - \frac{b}{r-1} + c\right\} \frac{(-)^r}{(r-2)!}$.

11. लघु$_2 e$.
13. $3e$.
14. $2e$.
15. $3e/2$.
16. $2e$.
17. $e^2 - e$.
18. $e - 1$.
19. $2e - 7/2$.
20. $5e$.

पृष्ठ 32 – 34

1. $2\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{a^3} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{a^5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)a^{2n-1}} + \ldots\right)$.

2. $3x - \frac{5x^2}{2} + \frac{9x^3}{3} - \frac{17x^4}{4} + \ldots + (-)^{r-1}(2^r+1)\frac{x^r}{r} + \ldots$

3. $x + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^4}{4} + \ldots + \{2 + (-)^r\}\frac{x^r}{r} + \ldots$.

5. लघु$_e$ (4/3).

16. 0·84510 ; 1·04139 ; 1·11394.

पृष्ठ 36 – 39

2. $2\,\Sigma\left\{\frac{x^{6r-5}}{6r-5} - \frac{2x^{6r-3}}{6r-3} + \frac{x^{6r-1}}{6r-1}\right\}$, r से प्रारम्भ कर।

6. $y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+\dots$

15. $0{\cdot}0020000$.

16. लघु$_3e$. लघु$_2e$.

17. $\frac{1}{4}(x-x^{-1})$ लघु $\{(1+x)/(1-x)\}+\frac{1}{2}$.

18. $(x^3+6x^2+7x+1)\,e^x$.

19. $15e$.

20. $17e/6$.

पृष्ठ 42 – 43

1. $\frac{2}{5(x-1)}+\frac{3}{5(x+4)}$.

2. $\frac{3}{4}(x+1)^{-1}+\frac{1}{4}(x-1)^{-1}+\frac{1}{2}(x-1)^{-2}$.

3. $\frac{2}{x}+\frac{3}{x-1}-\frac{4}{2x+1}$.

4. $\frac{-6}{2+3x}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$.

5. $\frac{-1}{x-3}+\frac{3x}{x^2+2x-5}$.

6. $\frac{1}{6}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]+\frac{2}{3(x^2+2)}$.

7. $\frac{4}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{(x+1)}$.

पृष्ठ 48

1. $1+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}$.

2. $\frac{3}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{7}{(x-1)^3}+\frac{5}{(x-1)^4}$.

3. $9x-27+\frac{1}{x-1}+\frac{80}{x+2}-\frac{48}{(x+2)^2}$.

4. $\frac{10}{x-3}-\frac{10}{x-2}-\frac{9}{(x-2)^2}-\frac{5}{(x-2)^3}$.

5. $\frac{2}{3(x-1)}+\frac{4}{3(x+2)}-\frac{2}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^3}$.

6. $\frac{x-2}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{3}{2(x-1)^2}$.

7. $\frac{11}{25(x-1)}+\frac{2}{5(x-1)^2}+\frac{4-11x}{25(x^2+4)}$.

8. $\frac{x+2}{x^2+1}+\frac{x-1}{x^2+x+1}$.

9. $\frac{-1}{27(x-1)}+\frac{2}{9(x-1)^2}+\frac{1}{27(x+2)}-\frac{1}{9(x+2)^2}$.

10. $\frac{-9}{25(x+2)}+\frac{9x+7}{25(x^2+1)}+\frac{2-x}{5(x^2+1)^2}$.

पृष्ठ 50–51.

1. $\left\{\frac{a^{r+2}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{r+2}}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^{r+2}}{(c-a)(c-b)}\right\}x^r$.

2. $(-)^r\frac{7}{3}\left\{\frac{1}{5^{r+1}}-\frac{1}{2^{r+1}}\right\}x^r$.

3. $\left[(-)^r\left\{\frac{5r}{3}+\frac{17}{9}\right\}+\frac{1}{9.2^r}\right]x^r$.

4. $\frac{1}{2}\left\{(-)^r-3\right\}x^{2r}$; $-\frac{3}{2}\left\{1+(-)^r\right\}x^{2r+1}$.

5. $1+(-)^{r-1}-2^{r+2}$.

6. $(-)^r\left\{3r+5-3\left(\frac{3}{2}\right)^r\right\}$.

7. $3+4(-)^{r/2}$ जब कि r सम है ; $3(-)^{(r+1)/2}-3$, जब कि r विषम है ।

8. $1-\frac{1}{(n+1)^2}$.

9. $\frac{1}{8}-\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^3}$.

10. $\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}-\frac{1}{(2-x)^2}$;

$$\sum_0^\infty \left(1-\frac{r+3}{2^{r+2}}\right)x^r \; ; \; n+2+\frac{n+4}{2^{n+1}}.$$

पृष्ठ 51–53.

1. $\frac{\Sigma a}{(a-b)\,(a-c)\,(x-a)}$.

2. $2x+3+\frac{1}{x-1}+\frac{5}{3x+1}$.

3. $x-2-\frac{17}{16(x-3)}+\frac{17}{16(x+1)}-\frac{11}{4(x+1)^2}$.

4. $\frac{1}{3(2x-1)}-\frac{5}{3(x-2)}-\frac{4}{(x-2)^2}$.

5. $-\frac{3}{16x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{11}{144(x+2)}+\frac{1}{6(x+2)^2}+\frac{1}{4(x+2)^3}$.

6. $\frac{x+\sqrt{2}}{2\sqrt{(x^2+x\sqrt{2}+1)}}-\frac{x-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(x^2-x\sqrt{2}+1)}$.

7. $\frac{10}{9(x+2)}-\frac{4}{3(x+2)^2}-\frac{x+4}{9(x^2+2)}$.

8. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2(x^2+x+1)}-\frac{1}{2(x^2-x+1)}$.

9. $\frac{1}{(x-1)^4}+\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x-1)}+\frac{x}{x^2-x+1}$.

10. $x-1+\frac{1}{8(x-1)}+\frac{9}{8(x+1)}-\frac{1}{4(x+1)^2}-\frac{x-1}{4(x^2+1)}.$

11. $\frac{7}{32(x+1)}-\frac{21}{32(3x-1)}+\frac{21}{8(3x-1)^2}-\frac{3}{2(3x-1)^3}.$

12. $\frac{-1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{3}{5(x-2)}-\frac{x+2}{10(x^2+1)}.$

13. $1-\frac{x}{2(x^2+x+1)}+\frac{x}{2(x^2-x+1)}.$

14. $\frac{128}{125(x+4)}+\frac{122}{125(x-1)}+\frac{28}{25(x-1)^2}+\frac{2}{5(x-1)^3}.$

15. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{3}{(x+1)^3}+\frac{2}{(x+1)^4}.$

16. $\frac{24}{(x-2)^4}+\frac{12}{(x-2)^3}+\frac{6}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{(x+1)}.$

17. $1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{r+1}.$

18. $4^{r-1}(11r+12).$

19. $(-)^r\left(3.2^{-r}\frac{11}{13}3^{-r}-\frac{7}{4}+\frac{3}{2}r\right).$

20. $\frac{-4}{9(x+2)}+\frac{4}{9(x-1)}-\frac{1}{3(x-1)^2}.$

21. $A=-\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2},\ \phi(x)=\frac{-(x-1)^n+1}{x(x-2)}$, जब कि n सम है;

$A=\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2},\ \phi(x)=\frac{-(x-1)^{n+1}+1}{x(x-2)}$, जब कि n विषम है।

23. $\frac{1}{x(x-1)}\left\{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x^{n+1}}\right\}.$

24. $\frac{1}{(1-a)^2}\left\{-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+ax}+\frac{1}{1+a^n x}-\frac{1}{1+a^{n+1}x}\right\}$.

25. $\frac{1}{(1-x)^2}\left\{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1-x^{m+1}}+\frac{1}{1-x^{m+2}}\right\}$.

पृष्ठ 58–59

5. $x^3+1 >$ अथवा $< x^2+x$, जब कि $x >$ अथवा < -1.

6. $x > 2$. 7. $x < 2$.

पृष्ठ 65–67

17. $6^3 \times 8^4$. 18. $2^5.3^{10}/5^4.7^7$.

19. 10. 20. $\{\surd(c+a)+\surd(c+b)\}^2$.

पृष्ठ 79–83

10. $4^4 \times 5^5$, जब $x=3$. 11. $2^{18}.3^{10}/7^7$.

12. $23^3/4.5.3^3$. 14. $2^{11}.3^3.4^4$.

पृष्ठ 90–91

1. 4. 2. –30. 3. 1.

4. $1/\surd 2$. 5. 2/5. 6. 5/2.

7. 0. 6. $1/\surd 2$. 9. 0.

10. 0. 11. 1/2. 12. – 1.

पृष्ठ 93–94

1. 0. 2. 2. 3. –1/6.

4. – 1. 5. $3/\{\surd\overline{2}\ \sqrt[3]{2}\}$. 6. –1/4.

7. $\surd/2$. 8. $1/2\surd a$. 13. $1/e$.

14. $1/ex$.

पृष्ठ 99

1. अपसारी। 2. अभिसारी। 3. अभिसारी।

4. अभिसारी। 5. अभिसारी। 6. दोलन की सीमाएं 1 और 2 हैं।

7. दोलन की सीमाएं $-\infty$ और $+\infty$ हैं।

पृष्ठ 103

4. अपसारी। 5. अपसारी।

पृष्ठ 108–109

1. अपसारी। 2. अपसारी। 3. अभिसारी।
4. अपसारी। 5. अभिसारी जब $p > 1$ अपसारी जब $p \leqslant 1$.
6. अपसारी। 7. अभिसारी। 8. अपसारी।
9. अपसारी। 10. अपसारी। 11. अपसारी।

पृष्ठ 120–122

1. अभिसारी। 2. अभिसारी।
3. अभिसारी जब $x \leqslant 1$, अपसारी जब $x > 1$।
4. अभिसारी जब $x < 1$, अपसारी जब $x \geqslant 1$।
5. अभिसारी जब $x < 1$, अपसारी जब $x \geqslant 1$।
6. अभिसारी जब $x \leqslant 1$, अपसारी जब $x > 1$।
7. अभिसारी जब $x < 1$, अपसारी जब $x \geqslant 1$।
8. अभिसारी जब $x \leqslant 1$, अपसारी जब $x > 1$।
9. अभिसारी जब $x \leqslant 0$, अपसारी जब $x > 0$।
10. अभिसारी। 11. अपसारी।
12. अभिसारी जब $x^2 \leqslant 1$, अपसारी जब $x^2 \geqslant 1$।
13. अभिसारी जब $x < 1$, अपसारी जब $x \geqslant 1$।
14. अभिसारी जब $x < 1$, अपसारी जब $x \geqslant 1$।
15. अपसारी जब $x \leqslant a$, अभिसारी जब $x > a$, मान लो $a > 0$।
16. अभिसारी जब $x < 1/e$, अपसारी जब $x \geqslant 1/e$।
17. अपसारी।
18. अपसारी। 19. अपसारी।
20. अभिसारी यदि $x < 1$ और अपसारी यदि $x > 1$, जब $x = 1$; अभिसारी जब $\gamma - \alpha - \beta > 0$, अपसारी जब $\gamma - \alpha - \beta \leqslant 0$।

पृष्ठ 124.

1. अभिसारी जब $a < 1$, अपसारी जब $a \geqslant 1$।
2. अभिसारी।
3. अभिसारी।
4. अभिसारी जब $x > 0$, अपसारी जब $x \leqslant 0$।
5. अभिसारी।

पृष्ठ 128

1. अभिसारी। 2. अभिसारी। 3. दोलायमान।
4. परम अभिसारी जब $x < 1$, सप्रतिबंध अभिसारी जब $x = 1$, और अनंत दोलक जब $x > 1$।
5. परम अभिसारी जब $x < 1$, सप्रतिबंध अभिसारो जब $x = 1$, और अनंत दोलक जब $x > 1$।
6. हाँ। 7. नहीं।
8. परम अभिसारी जब $x < 1$, अभिसारी नहीं जब $x \geqslant 1$।

पृष्ठ 129 – 131

1. अपसारी। 2. अपसारी। 3. अभिसारी।
4. अभिसारी। 5. अपसारी। 6. अभिसारी।
7. अभिसारी यदि $p > 2$, अपसारी यदि $p \leqslant 2$।
8. अपसारी। 9. अपसारी। 10. अभिसारी यदि $n \neq 1$।
11. अभिसारी यदि $q < p + 1$, अपसारी यदि $q \leqslant p + 1$।
12. अभिसारो जब $p > 1/2$, अपसारी जब $p \leqslant 1/2$।
13. अपसारी। 14. अभिसारी। 15. अभिसारी।
16. अभिसारी। 17. अपसारी।
18. अभिसारी यदि $0 < x^2 < 1$, अपसारी यदि $x = 0$।
19. अभिसारी यदि $x \leqslant 1$, अपसारो यदि $x > 1$।
20. अभिसारी जब $x \leqslant 1$, अपसारो जब $x > 1$।
21. अभिसारी यदि $x \leqslant 1$, अपसारी यदि $x > 1$।
22. अभिसारी यदि $x \leqslant 1$, अपसारी यदि $x > 1$।
23. अभिसारी यदि $x \leqslant 1$, अपसारी यदि $x > 1$।
24. अभिसारी यदि $x < 1/e$, अपसारी यदि $x \geqslant 1/e$।
25. अभिसारी यदि $x < 1/e$, अपसारी यदि $x \geqslant 1/e$।
26. अभिसारी यदि $x < 1$, अपसारी यदि $x = 1$, अभिसारी जब $a - b + c < 0$, अपसारी जब $a - b + c \geqslant 0$।
27. अभिसारी यदि $x < 1$, अपसारी यदि $x \geqslant 1$ फल, q के हर मान के लिए धन अथवा शून्य, सही है।

31. अभिसारी।

32. (i) अभिसारी। (ii) अभिसारी।

पृष्ठ 134–135

1. $2+3x-x^2-18x^3-49x^4-\ldots\ldots$

2. $u_n-4u_{n-1}+3u_{n-2}=0.$

3. $u_n-7u_{n-1}+12u_{n-2}=0.$

5. (i) $u_n-3u_{n-1}+3u_{n-2}-u_{n-3}=0.$

(ii) $u_n-7u_{n-1}+12u_{n-2}=0.$

पृष्ठ 140

1. $\dfrac{2-3x}{1-3x+2x^2}$; $(1+2^n)x^n$; $\dfrac{1-x^n}{1-x}+\dfrac{1-2^nx^n}{1-2x}$.

2. $\dfrac{7-20x}{1-2x-3x^2}$; $\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1-(3x)^n}{1-3x}+27\,\dfrac{1-(-x)^n}{1+x}\right]$;

$$\frac{7-20x}{1-2x-3x^2}-\frac{\{3^n+(-)^n27\}x^n+\{3^n-(-)^n81\}x^{n+1}}{4(1-2x-3x^2)}.$$

3. $(4^{n-1}+3^{n-1})x^{n-1}.$

4. $9n-\dfrac{16}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}.$

5. $\dfrac{1}{4}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}-2\right].$

पृष्ठ 140 – 141

1. $21u_n+4u_{n-1}-31u_{n-2}=0.$

2. $11u_n-5u_{n-1}-21u_{n-2}=0.$

3. $u_n-4u_{n-1}+4u_{n-2}=0.$

4. (i) $u_n-3u_{n-1}+3u_{n-2}-u_{n-3}=0.$

(ii) $u_n-4u_{n-1}+6u_{n-2}-4u_{n-3}+u_{n-4}=0.$

5. $u_n-3u_{n-1}+3u_{n-2}-u_{n-3}=0$; $\dfrac{2-x+x^2}{(1-x)^3}$.

6. $u_n-3u_{n-1}+3u_{n-2}-u_{n-3}=0$; $\dfrac{3-4x+3x^2}{(1-x)^3}$.

7. $\frac{1}{7}\left\{15(-)^{n-1}2^{n-1}-5^{n-1}\right\}x^{n-1}$.

8. $(4.3^n-3.2^n)x^n$.

9. $(3^n+3.2^n)x^n$.

10. $n+3n(n+1)/2$ जब कि n सम और $n+\frac{3}{2}n(n+1)-1$ जब कि n विषम है।

11. $\frac{1}{2}(3^n-1)+(2^n-1)$.

12. $\frac{1}{7}\left[\frac{3}{2}(3^n-1)-\frac{11}{5}\left\{(-4)^n-1\right\}\right]$.

13. $u_n-12u_{n-1}+32u_{n-2};\ \frac{1}{2}\left[4^{n-1}+8^{n-1}\right];\ \frac{2^{3n}}{14}+\frac{2^{2n}}{6}-\frac{5}{21}$.

14. $\frac{1}{4}\left[(-)^{n-1}+3.3^{n-1}\right]x^{n-1};\ \frac{1}{16}\left[4n+3+(-3)^{n+1}\right]$.

पृष्ठ 145

1. $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$.

2. $1, \frac{3}{2}, \frac{10}{7}, \frac{43}{30}, \frac{225}{157}$.

3. $\frac{1075}{495}$.

4. $\frac{193}{471}$.

5. $\frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{7}$.

6. $\frac{1}{2+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{5+}\ \frac{1}{4+}\ \frac{1}{3}$.

7. $\frac{1}{3+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{3}$.

8. $\frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{3}$.

9. $\frac{1}{3+}\ \frac{1}{4+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{4+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{4}$.

10. $4+\frac{1}{1+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{7}$.

पृष्ठ 155

3. $\frac{916}{191}$. 4. $\frac{157}{225}$. 5. $\frac{355}{113}$.

पृष्ठ 159

1. $\frac{1}{2}\left(-3+\sqrt{21}\right)$. 2. $\frac{1}{4}\left(9+\sqrt{5}\right)$.

3. $\sqrt{(13/2)}-2$. 4. $\frac{1}{7}\left(\sqrt{37}-4\right)$.

5. $1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\cdots$. 6. $2+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\cdots$.

7. $3+\frac{1}{6+}\cdots\cdots\cdots$. 8. $3+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\cdots$.

9. $a+\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{2a+}\cdots$.

10. $4+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{3+}\cdots;\ \frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{3+}\cdots$.

पृष्ठ 161–164

1. $1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{12+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{9}$; $x=185,\ y=96$.

2. $2+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{1+}$; $x=127,\ y=55$.

3. प्रथम तीन अभिसृतक $\frac{n-1}{1}$, $\frac{n^2}{n+1}$, $(n^3-n^2+n-1)/n^2$ हैं।

4. $\frac{1}{a+}\,\frac{1}{(a+1)+}\,\frac{1}{(a+2)+}\,\frac{1}{(a+3)}$; $\frac{a^2+3a+3}{a^3+3a^2+4a+2}$.

5. $1+\frac{1}{x+}\frac{1}{x}$; $A=x^2-x+1, B=x^2$ अथवा $A=x, B=x+1$.

15. $\frac{n}{n+1}$. 16. $2\left[\frac{(3+\sqrt{13})^n-(3-\sqrt{13})^n}{(3+\sqrt{13})^{n+1}-(3-\sqrt{13})^{n+1}}\right]$.

पृष्ठ 169–170

1. $[5 \ 7 \ 9]$. 2. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 8 & 1 & 12 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 5 & -12 & 10 \\ 7 & 8 & 14 \\ 6 & -2 & 16 \end{bmatrix}$. 4. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & -3 \\ -10 & -5 & -9 & -5 \\ -3 & 4 & 7 & 6 \\ -9 & -2 & 16 & 15 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

6. $A+B=\begin{bmatrix} 5 & 14 & 16 \\ 4 & 9 & 20 \\ 2 & 8 & 11 \end{bmatrix}$; $A-B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

पृष्ठ 172–173

1. (i) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(ii) $[30]$; $\begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 & 20 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. 4. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$; नहीं।

5. $\begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 7 \\ -4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} 50 & 19 \\ -284 & -12 \\ 167 & 21 \end{bmatrix}$.

पृष्ठ 173–176

2. $\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 21 & 30 \\ -10 & -6 \end{bmatrix}$; नहीं ।

3. $AB = \begin{bmatrix} 15 & 5 & 13 & 17 \\ -5 & 5 & 1 & -11 \\ 9 & -3 & -3 & -3 \\ 6 & 23 & 16 & 5 \end{bmatrix}$ और $BA = \begin{bmatrix} -11 & 9 & 17 & 25 \\ -14 & 9 & 5 & 17 \\ -17 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & 9 & 9 & 25 \end{bmatrix}$.

5. अस्तित्व नहीं है।

6. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$.

12. $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ -18 & -12 \\ 27 & 18 \end{bmatrix}$.

पृष्ठ 180

1. 0. 2. 0. 3. –8.

4. 0. 5. –50.

पृष्ठ 187–189

1. 5300. 2. 160 3. 0

4. 6. 5. 0. 6. $a(x-a)^3$.

7. $-(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$.

पृष्ठ 193

1. -247. 2. $4a^2b^2c^2$. 3. $4a^2b^2c^2$.

4. $(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$.

पृष्ठ 195–196

1. $x=-1, y=1. z=2$. 2. $x=1, y=1, z=1$.

3. $x=\frac{1}{2}(a+2b+c)$, $y=\frac{1}{2}(a+2c+b)$, $z=\frac{1}{2}(b+2a+c)$.

4. $$x=\frac{(k-b)(k-c)(k-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}.$$

5. $$x=\frac{k(c-k)(k-b)}{a(c-a)(a-b)},\quad y=\frac{k(c-k)(k-a)}{b(c-b)(b-a)},$$

$$z=\frac{k(a-k)(k-b)}{c(a-c)(c-b)}.$$

पृष्ठ 199–200

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 & -7 & 1 \\ -7 & 14 & -5 \\ 1 & -5 & 14 \end{pmatrix}.$$

2. $$\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/11 & 2/11 \\ 4/11 & -1/11 \end{pmatrix}.$$

4. $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ -1 & 5 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 21 & -7 & -8 \\ -18 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/10 & 3/10 & 1/5 \\ 21/20 & -7/20 & -2/5 \\ -9/10 & 3/10 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

5. स्वयं।

6. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

7. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

पृष्ठ 202

1. $x = 15/7$, $y = 2/7$. 2. $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$.

3. $x = 31/2$, $y = -13/2$, $z = 4$.

4. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. $x_3 = 1$.

5. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$.

पृष्ठ 205–208

1. 0. 2. $(a-b)(b-c)(a-c)(a-d)(b-d)(c-d)$.

3. 0. 4. $abcd\,(1 + 1/a + 1/b + 1/c + 1/d)$.

5. $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$.

7. $0, \pm\sqrt{\{\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)\}}$. 8. 4.

9. $-1, -1, -2$. 10. $-10/89$.

22. $x = 1/(a-b)(a-c)$ इत्यादि।

पृष्ठ 216–217

1. 5 और 6 के मध्य। 2. 1 और 2 के मध्य।

3. 1 और 2 के मध्य। 4. $-1 \pm \sqrt{2}, -1 \pm i$.

5. $2, -1, \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} i$. 6. $\frac{-3}{2}, \frac{-1}{3}, 2 \pm \sqrt{3}$.

8. 6. 11. $2, 2, -1, -3$.

12. $-2, \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$.

पृष्ठ 222–223

1. $-q/r$. 2. $-p^3 + 3pq - 3r$.

3. $p^2q - 2q^2 - pr$. 4. $(pq - 3r)/r$.

5. $r-pq$.

6. 1, 1, -2.

7. -2, 1, 4.

8. 2/3, 2, 6.

9. $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$; $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$.

10. -3, 7, 9.

13. 2.

14. 10.

15. 123.

पृष्ठ 229–231

1. (i) $x^3+5x^2-7x-3=0$. (ii) $x^5+x^2+x+3=0$.

   (iii) $x^7+3x^5+x^3+x^2+7x-2=0$.

2. $x^3+6x^2-36x+27=0$.

3. $x^3+3x^2+50x-2500=0$.

4. (i) $3\pm2\sqrt{2}$, $2\pm\sqrt{3}$. (ii) $\frac{1}{4}[5+\sqrt{5}\pm\sqrt{(14+10\sqrt{5})}]$.

   (ii) $\frac{1}{4}[5+\sqrt{5}\pm\sqrt{(14+10\sqrt{5})}]$,

   $\frac{1}{4}[5-\sqrt{5}\pm\sqrt{(14-10\sqrt{5})}]$.

   (iii) ±1, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}(5\pm i\sqrt{11})$.

5. $x^4+13x^3+60x^2+116x+80=0$.

6. $2x^4+23x^3+97x^2+182x+131=0$.

7. $x^3-8x-15=0$.

8. $x^4+8x^3-111x-196=0$.

9. 1, $(-7\pm5\sqrt{5})/2$.

10. $\frac{1}{4}\{3+\sqrt{5}\pm i\sqrt{(10+2\sqrt{5})}\}$, $\frac{1}{4}\{3-\sqrt{5}\pm i\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\}$.

11. $x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$.

12. $x^3+33x^2+12x+8=0$.

13. (i) $x^3-q^2x^2-2qr^2x-r^4=0$.

    (ii) $rx^3+q^2x^2-2qrx+r^2=0$.

    (iii) $rx^3+q(1-r)x^2+(1-r)^3=0$.

14. (i) $x^3-2qx^2+(q^2+pr)x+r(r-pq)=0.$

(ii) $(r-pq)x^3+(3r-2pq+p^3)x^2+(3r-pq)x+r=0.$

15. $x^3+6qx^2+9q^2x+27r^2+4q^3=0.$

पृष्ठ 240

1. 5.
2. 3.
3. $x^4-25x^3+375x^2-390=0.$
4. $x^4-8x^3-275x^2+2790x+5175=0.$
5. 6.
6. 8, 8, $-1/2$.
7. $-4, -4, -4, 3.$
8. 1·414.
9. 1·3195.
10. 0·484.
11. 2·59.
12. 1·259.
13. 7·05,
14. 2·04728.

पृष्ठ 241

1. $2\pm\sqrt{3}, 3, -5.$
2. $-1\pm\sqrt{2}, -1\pm\sqrt{(-i)}.$
6. $pr-4s.$
11. $2, -1, -3/2.$
12. $-2, (1\pm i\sqrt{15})/12.$
13. $4, 2, 4/3.$
14. $-2, 3, 4.$
16. $x^3-8x^2+19x-15=0.$
17. $x^4-24x^2+65x-55=0.$
18. $r^2(x+1)^3+q^3(x+1)+q^3=0.$
19. $x^3-p_1(p_1-2p_2)x^2+(p_2^2-2p_1p_3)x-p_3^2=0.$
20. $r^2x^3+pr(1+r)x^2+q(1+r)^2x+(1+r)^3=0.$
21. $x(rx+q)^2=r.$
25. $1/2, 2/3.$
26. 1·784.
27. 0·5616.
28. 2·080.
29. 3·1768.
30. 6·25.

परिशिष्ट

ग्रीक वर्णमाला

∝	A	alpha
β	B	beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
∈	E	epsilon
ξ	Z	zeta
η	H	eta
θ	Θ	theta
l	I	iota
k	K	kappa
λ	Λ	lambda
μ	M	mu
v	N	nu
ξ	Ξ	xi
o	O	omicron
π	π	pi
ρ	P	rho
σ	Σ	sigma
T	T	tau
ϑ	ϒ	upsilon
ϕ	Φ	phi
x	X	chi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

गणितीय संकेतन

$\sqrt{}$	root	वर्गमूल
$\sqrt[3]{}$	cube root	घनमूल
$\sqrt[n]{}$	n th root	nवाँ मूल
$\sim$	difference	अंतर
$>$	greater than	से वड़ा
$<$	less than	से लघु
$\gtreqless$	greater, equal or less than	से वड़ा, वरावर अथवा लघु
$\equiv$	identically equal to	सर्वसमतः वरावर
$\neq$	not equal to	वरावर नहीं
$\propto$	proportional to	समानुपाती
Σ	summation	संकलन
∞	infinity	अनन्त
§	section	अनुच्छेद
Δ	delta	डेल्टा
$\wedge$	caret	कॉरेट
( )	small bracket	लघु कोष्ठक
{ }	round bracket	धनु कोष्ठक
[ ]	square bracket	गुरु कोष्ठक

संक्षिप्तका

ग्रा०	ऑनर्स
उदा०	उदाहरण
कोज्याति	ग्रतिपरवलयिक कोज्या
ज्याति	अतिपरवलयिक ज्या
म० स०	महत्तम समापवर्तक
ल० स०	लघुतम समापवर्त्य
प्रा०	प्रारम्भिक
पू०	पूरक
स० श्रे०	समांतर श्रेढी
गु० श्रे०	गुणोत्तर श्रेढी
ह० श्रे०	हरात्मक श्रेढी

हिन्दी-अँग्रेजी पारिभाषिक शब्द-संग्रह

अ

अ-अभिसारी	Non-convergent
अग्राह्य	Inadmissible
अचर	Constant
अतिपरवलय ज्या	Hyperbolic sine
अतिपरवलय कोज्या	Hyperbolic cosine
अति लघु	Indefinitely small
अदिश आव्यूह	Scalar matrix
अनासक्त गुणांक	Detached coefficient
अनिर्धारित	Indeterminate
अनियतरूपेण बृहत	Indefinitely large
अनियत	Irregular
अनुगमित होना	Follow
अनुक्रमण	Sequence
अनुचित भिन्न	Improper Fraction
अनुच्छेद	Article
अन्तर्ग्रस्त	Involved
अनन्त	Infinite
अनन्य	Unique
अनुपात परीक्षा	Ratio test
अनुप्रयोग करना	Apply
अनुप्रयोग	Application
अन्तर्निहित	Imply
अनुबंध	Suffix
अनुलोमतः	Directly
अनुवर्ती पद	Following term
अपरिमेय	Irrational

अपसरण	Divergence
अपसारी श्रेणी	Divergent series
अभिप्राय	Purpose
अभिमुख	Opposite
अभिव्यक्त करना	Express
अभिसरण	Convergence
अभिसृत, अभिसारी	Convergent
अभिसारी श्रेणी	Convergent series
अवकाश	Space
अवकलन करना	Differentiate
अवकलनीय	Differentiable
अवकलीयता	Differentiability
अवकल गणित	Differential calculus
अवयव	Element
अवरोही श्रेणी	Descending series
अविचित्र आव्यूह	Non-singular or ordinary matrix
अस्तित्व	Existence
असमता	Inequality
असार	Immaterial
अज्ञात	Unknown

आ

आकुंचन	Contraction
आगमन	Induction
आनर्स	Honours
आरोही श्रेणी	Ascending series
आव्यूह	Matrix
आवर्ती श्रेणी	Recurring series

इ

इति कृतम्	Quod erat faciendum (Q. E.F.) (which was to be done)
इति सिद्धम्	Quod erat demonstrandum (Q. E. D.) (which was to be proved)

उ

उचित भिन्न	Proper fraction
उच्च गणित	Higher mathematics
उच्च करना	Raise
उत्क्रमणीय	Reversible
उत्क्रमिक क्रम	Reversed order
उत्तरोत्तर	Successively
उप-आव्यूह	Sub-matrix
उप-प्रमेय	Corollary
उपेक्षा करना	Neglect
उभयनिष्ठ	Common

ए

एकक आव्यूह	Unit matrix
एकल	Single
एकात्मक	Unitary
एकान्तरतः	Alternately
एकान्तर श्रेणी	Alternating series

ओ

औपचारिक	Formal

अं

अंकगणित	Arithmetic
अंश	Numerator

क

करणी	Surd
क्रमभंग	Derangement
क्रमभंग श्रेणी	Deranged series
क्रमशः	Respectively
क्रमागत	Consecutive
क्रमिक	Successive
क्रमिक ह्रास	Successive diminution
कल्पित करना	Assume
कारक	Operator
काल्पनिक	Imaginary
क्रिया कौशल	Manipulation
कुलक/समुच्चय	Set
कैले	Cayley
कोई घातांक	Any index
कोज्याति	Hyperbolic cosine (cosh)
कोज्या	Cosine
कोटि	Order
कोष्ठक	Bracket
धनु-कोष्ठक	Round bracket
लघु-कोष्ठक	Small bracket
गुरु-कोष्ठक	Square bracket
कोशी की मूल परीक्षा	Cauchy's root test
कोशी की संघनन परीक्षा	Cauchy's condensation test

ख

खण्डन	Resolution
खण्डन करना	Resolve

ग

गणना	Calculation
गणना करना	Calculate

गणितीय आगमन	Mathematical Induction
गणितीय निगमन	Mathematical deduction
गुणधर्म	Property
गुणनखंड	Factor
गुणनखंड करना	Factorisation
गुणनखंडन	Factorisation
गुणोत्तर श्रेणी	Geometric series
गुणोत्तर माध्य	Geometric mean
गुणांक	Coefficient
गुणांक आव्यूह	Coefficient matrix
गौस	Gauss

घ

घन	Cube, cubic
घनमूल	Cube root
घन समीकरण	Cubic equation
घात	Power or degree
घातीय प्रमेय	Exponential theorem
घातीय श्रेणी	Exponential series
घातांक	Index or exponent

च

चर	Variable
चर, परतंत्र	Dependent variable
चर, स्वतंत्र	Independent variable
चलन कलन	Differential calculus
चतुर्घात समीकरण	Biquadratic or quartic equation
चान्द्र मास	Luner month

ज

जनक फलन	Generating function
जनक रेखा	Generating line

ज्या	Sine
ज्याति	Hyperbolic sine (sinh)

ट

टिप्पणी	Note
टेलर	Taylor
टेलर-प्रमेय	Taylor's theorem
टेलर-विस्तार	Taylor's expansion
टेलर-श्रेणी	Taylor's series

ड

डिलैम्बर्ट	D' Alembert
डिलैम्बर्ट की परीक्षा	D' Alembert's test
डिलैम्बर्ट का सिद्धांत	D' Alembert's principle

त

तकनीक	Technique
तर्कसंगत	Logical
तादात्म्य/सर्वसमिका	Identity
तुल्य	Equivalent
तुल्यता	Equivalence
तुलना परीक्षा	Comparision test

द

दकार्त	Descartes
दकार्त का चिन्ह-नियम	Descartes' rule of signs
दक्षिण पक्षीय	Right hand side (R. H. S.)
द्विघात समीकरण	Quadratic equation
द्वितीय क्रम	Second order
द्विपद-प्रमेय	Binomial theorem

द्विपद-गुणांक	Binomial coefficient
द्विपद-व्यंजक	Binomial expression
द्वि-विमितीय	Two-dimensional
दोलन करना	Oscillate
दोलायमान श्रेणी	Oscillating series

न

न्यूनतम	Minimum
न्यूटन की सन्निकटन विधि	Newton's method of approximation
न्यूटन के गतिनियम	Newton's laws of motion
निगम	Deducible
निगमन	Deduction
निगमन करना	Deduce
निर्दिष्ट	Given
निर्देशन	Illustration
निर्देशांक	Coordinate
निर्देशाक्ष	Axes of coordinates
निरसन/विलोपन	Elimination
निरसन करना/विलोपन करना	Eliminate
निरसनफल/विलोपनफल	Eliminant
नियत	Fixed
निरूपित करना	Represent
निरूपण	Representation
निष्कर्ष	Conclusion
नेपियर	Napier
नोट	Note

प

पद	Term
प्राक्कथन	Preface
प्रक्रम	Process

प्रतिनिधि	Representative
परिशुद्ध	Precise
प्रतिलोम	Reverse
प्रतिवर्तित क्रम	Reversed order
प्रतिबंध	Condition
प्रतिस्थापन	Substitution
प्रतिस्थापित करना	Substitute
पृथकत:	Separately
प्रमेय	Theorem
प्रमेयिका	Lemma
प्रवृत्त करना	Tend
प्रेक्षा	Observation
परम अपसारी	Absolutely divergent
परम अभिसारी	Absolutely convergent
प्रारम्भिक	Preliminary
परिकल्पना	Hypothesis
परिकलन	Calculation
परिमाण	Magnitude
परिमित	Finite
परिमेय	Rational
परिमेयकरण	Rationalisation
परिमेय पूर्णसांख्यिक बीजीयसमीकरण	Rational integral algebraic equation
परिवर्तन करना	Alter
परिशुद्धता-मात्रा	Degree of accuracy
परीक्षण और चूक	Trial and error
परीक्षण भाजक	Trial-divisor
परीक्षा	Test
पक्षांतरण	Transposition
पारित होना	Satisfy
पारिभाषिक शब्दावली	Technical terminology

पुनरावृत्त	Repeated
पुनरावृत्ति	Repetition
पुनर्विन्यास	Re-arrangement
पूर्ण समीकरण	Complete equation
पूर्ण संख्या	Integer
पूरक	Supplementary
पूर्वगत् पद	Preceding term

फ

फलन	Function

ब

वृहत	Large
वृहत संख्या	Large number
वहुपद	Polynomial
वहुमूलक	Multiple root
वीजीय फलन	Algebraic function
वीजीय समीकरण	Algebraic equation
बीजगणित	Algebra

भ

भाग	Division
भागफल	Quotient
भाज्य	Dividend
भाजक	Divisor
भिन्न	Fraction

म

मध्य पद	Middle term
महत्तम पद	Greatest term
माध्य	Mean
मानक रूप	Standard form
मापांक	Modulus

मात्रा	Quantity
मूल	Root or main
मौलिक	Fundamental

य

यथार्थतः	Exactly
यादृच्छिक	At-random
युगपत्	Simultaneous
युगपत् समीकरण	Simultaneous equation
युगल	Pair

र

रचक	Constituent
राबे-परीक्षा	Raabe's test
राशि	Quantity
रूपान्तरण	Transformation
रूपान्तरित करना	Transform

ल

लघु	Minor
लघुगणक	Logarithm
लघुगणकीय फलन	Logarithmic function
लघुगणकीय श्रेणी	Logarithmic series
लुप्त/विलोपन	Elimination
लुप्त करना/विलोपन करना	Eliminate

व

व्यवस्थित करना	Arrange
व्यापक	General
व्युत्क्रम	Reciprocal
व्युत्पत्ति	Derivation
व्युत्पन्न	Derived
व्युत्पन्न करना	Derive

व्युत्पन्न समीकरण	Derived equation
व्यंजक	Expression
वर्ग-ग्राव्यूह	Square matrix
वर्ग-संरचना	Square-structure
वर्गीकरण	Groupism
वाम पक्षीय	Left hand side (L. H. S.)
वायर्स्ट्रास	Weierstrass
वॉण्डर मोण्ड	Vandermonde
वांछित	Required or desired
विकर्ण	Diagonal
विकल्प	Alternate or alternative
विघटन करना	Resolve
विचित्र ग्राव्यूह	Singular matrix
वितत भिन्न	Continued fraction
वितत भिन्न का ग्रभिसृतक	Convergent of continued fraction
विनिमय करना	Exchange
विमिति	Dimension
विरचना	Formation
विलोम	Converse
विलोमतः	Conversely
विविध	Miscellaneous
विस्तार	Expansion
विषम	Odd
विशिष्ट, विशेष	Particular
वैकल्पिक	Alternate or alternative
वैश्लैषिक रीति	Analytical method
वंटन-नियम	Distributive-law

स

स्तंभ	Column
स्तंभ ग्राव्यूह	Column matrix

स्तंभ सदिश	Column vector
स्वयं तथ्य	Axiom
सत्यापन करना	Verify
सतत्	Continuous
सतत् फलन	Continuous function
सन्निकट, सन्निकटतः	Appoximately
सन्निकटन	Approximation
सप्रतिबंध अभिसारी	Conditionally convergent
सभ्रांति	Confusion
सम	Even
सम एक घात समीकरण	Homogeneous linear equation
समदूरस्थ	Equidistant
सममित फलन	Symmetric function
समरूप	Similar or same
समाकलन	Integration
समाकलन गणित	Integral calculus
समान्तर माध्य	Arithmatic mean
समान्तर श्रेढी	Arithmetic progression
समान्तर गुणोत्तर श्रेणी	Arithmetico-geometric series
समीकृत करना	Equate
समीकरण-सिद्धांत	Theory of equations
समीक्षा	Review
सर्वसम	Identical
सर्वसमतः	Identically
सर्व समिका	Identity
सरल वितत भिन्न	Simple continued fraction
सहखंड	Cofactor
सहखंडज	Adjutant
सहायक समीकरण	Auxiliary equation
सहायक श्रेणी	Auxiliary series
साध्य	Preposition

साधारण लघुगणक	Common logarithm
साधित उदाहरण	Solved examples
सामान्यतः	Generally
सामंजस्य	Consistence
सायन वर्ष	Tropical year
सार्व अनुपात	Common ratio
सारणिक	Determinant
सारभूत	Fundamentally
सीमा	Limit
सैद्धान्तिक कार्य	Theoretical work
संकेतन	Notations
संख्यात्मक	Numerical
संगत	Corresponding
संदर्श-रेखण	Perspective drawing
संदिग्ध	Ambiguous
संपरिवर्तन	Conversion
संपरिवर्तन करना	Convert
संपतन, संपात	concidence
संबंध-मापनी	Scale of relation
संबंधित आव्यूह	Related matrix
संयुक्त	Combined
संयुग्मी	Conjugate
संरूपांतरित करना	Transform
संलग्न	Adjacent
संश्लैषात्मक-भाजन	Synthetic division
संक्षिप्त	Brief
संक्षिप्तिका	Abbreviations
सांत दशमलव	Terminating decimal

श

श्रेणी	Series
श्रेढी	Progression

शीघ्रतर अभिसारी	More rapidly convergent
शून्य आव्यूह	Null matrix

ह

हर	Denominator
हरात्मक श्रेढी	Harmonic progression
हॉर्नर की विधि	Horner's method

क्ष–क

क्षैतिज संरेखण	Horizontal alignment

त्र–त

त्रिविमितीय	Three-dimensional
त्रुटि	Error

———

अंग्रेजी-हिन्दी पारिभाषिक शब्द-संग्रह

A

Abbreviation	संक्षप्तिका
Absolute convergence	परम अभिसरण
Absolutely convergent	परम अभिसारी
Adjacent	संलग्न
Adjutant	सहखंडज
Algebra	वीजगणित
Algebraic	वीजीय
Algebraic function	वीजीय फलन
Alter	परिवर्तन करना
Alternately	एकान्तरतः
Alternating series	एकान्तर श्रेणी
Ambiguous	संदिग्ध
Analytical method	वैश्लेषिक विधि
Any index	कोई घातांक
Application	अनुप्रयोग
Apply	अनुप्रयोग करना
Approximately	सन्निकट, सन्निकटतः
Approximation	सन्निकटन
Arithmetic	अंकगणित
Arrange	व्यवस्थित करना
Arithmetic mean	समांतर माध्य
Arithmetic progression	समांतर श्रेढी
Arithmetico-geometric series	समांतर गुणोत्तर श्रेणी
Article	अनुच्छेद
Ascending series	आरोही श्रेणी
Assume	कल्पना करना

At random	यादृच्छिक
Auxiliary equation	सहायक समीकरण
Auxiliary series	सहायक श्रेणी
Axis of coordinates	निर्देशाक्ष
Axiom	स्वयं तथ्य

B

Binomial coefficient	द्विपद गुणांक
Binomial expression	द्विपद व्यंजक
Binomial theorem	द्विपद प्रमेय
Biquadratic equation	चतुर्घात समीकरण
Bracket	कोष्ठक
Brief	संक्षिप्त

C

Calculate	गणना करना
Cauchy's root test	कोशी की मूल परीक्षा
Cauchy's condensation test	कोशी की संघनन परीक्षा
Cayley	कैले
Coefficient	गुणांक
Coefficient matrix	गुणांक ग्राव्यूह
Coincidence	संपतन
Column	स्तंभ
Column matrix	स्तंभ ग्राव्यूह या सदिश
Combined	संयुक्त
Common logarithm	साधारण लघुगणक
Common ratio	सार्व-अनुपात
Comparison test	तुलना-परीक्षा
Complete equation	पूर्ण समीकरण
Conditionally convergent	सप्रतिबंध अभिसारी
Conclusion	निष्कर्ष
Confusion	सभ्रांति

Conjugate	संयुग्मी
Consistence	सामंजस्य
Constant	अचर
Constituent	अवयव
Continued fraction	वितत भिन्न
Continuous	सतत
Continuous function	सतत फलन
Contraction	आकुंचन
Convergence	अभिसरण
Convergent	अभिसारी, अभिसृतक
Convergent of continued fraction	वितत भिन्न का अभिसृतक
Convergent series	अभिसारी श्रेणी
Converse	विलोम
Conversely	विलोमतः
Conversion	संपरिवर्तन
Convert	संपरिवर्तन करना
Coordinate	निर्देशांक
Corollary	उपप्रमेय
Corresponding	संगत
Cosine	कोज्या
Cube	घन
Cube root	घनमूल
Cubic equation	घन समीकरण

D

D'Alembert	डिलैम्वर्ट
D'Alembert's principle	डिलैम्वर्ट का सिद्धांत
D'Alembert's test	डिलैम्वर्ट परीक्षा
Deduce	निगमन करना

Deducible	निगम
Deduction	निगमन
Degree of accuracy	परिशुद्धता-मात्रा
Denominator	हर
Dependent variable	परतंत्र चर
Derangement	क्रमभंग
Deranged series	क्रमभंग श्रेणी
Derivation	व्युत्पत्ति
Derived	व्युत्पन्न
Derived equation	व्युत्पन्न समीकरण
Descending series	अारोही श्रेणी
Descartes' rule of signs	दकार्त का चिन्ह-नियम
Detached coefficient	अनासक्त गुणांक
Determinant	सारणिक
Diagonal	विकर्ण
Differentiable	अवकलनीय
Differentiability	अवकलनीयता
Differential calculus	अवकलन गणित
Differentiate	अवकलन करना
Dimension	विमति
Directly	अनुलोमतः
Distributive law	वंटन नियम
Divergence	अपसरण
Divergent series	अपसारी श्रेणी
Dividend	भाज्य
Division	भाग
Divisor	भाजक

E

Element	अवयव
Eliminant	निरसनफल/विलोपनफल

Elimination	निरसन/विलोपन
Equation	समीकरण
Equate	समीकृत करना
Equidistant	समदूरस्थ
Equivalence	तुल्यता
Equivalent	तुल्य
Error	त्रुटि
Even	सम
Exactly	यथार्थतः
Exchange	विनिमय करना
Existence	अस्तित्व
Express	अभिव्यक्त करना
Exponent	घातांक
Exponential theorem	घातीय प्रमेय
Exponential series	घातीय श्रेणी

F

Factor	गुणनखंड
Factorise	गुणनखंड करना
Finite	परिमित
Fixed	नियत
Follow	अनुगमनित होना
Following term	अनुवर्ती पद
Formal	औपचारिक
Formation	विरचना
Fraction	भिन्न
Function	फलन
Fundamental	मौलिक
Fundamentally	सारभूत

G

Gauss	गौस
General	व्यापक
Generally	सामान्यतः
Generating function	जनक फलन
Generating line	जनक रेखा
Geometric mean	गुणोत्तर माध्य
Geometric series	गुणोत्तर श्रेणी
Given	निर्दिष्ट
Greatest term	महत्तम पद
Groupism	वर्गीकरण

H

Harmonic progression	हरात्मक श्रेढी
Higher mathematics	उच्च गणित
Homogeneous linear equation	सम एक घात समीकरण
Horizontal alignment	क्षैतिज संरेखण
Horner's method	हॉर्नर की विधि
Hyperbolic cosine	अतिपरवलियिक कोज्या (कोज्याति)
Hyperbolic sine	अतिपरवलयिक ज्या (ज्याति)

I

Identical	सर्वसम
Identity	सर्वसमिका, तादात्म्य
Illustration	निर्देशन
Imaginary	काल्पनिक
Immaterial	असार
Imply	अंतर्निहित
Improper fraction	अनुचित भिन्न
Inadmissible	अग्राह्य
Inequality	असमता

Indefinitely small	अति लघु
Independent variable	स्वयं चर
Indefinitely large	अनियतरूपेण बृहत
Index	घातांक
Induction	आगमन
Integral calculus	समाकलन गणित
Integration	समाकलन
Integer	पूर्ण संख्या
Involved	अन्तर्ग्रस्त
Irrational	अपरिमेय
Irregular	अनियमित

L

Large	बृहत
Large number	बृहत संख्या
Left hand side	वाम पक्षीय
Lemma	प्रमेयिका
Limit	सीमा
Logarithm	लघुगणक
Logarithmic function	लघुगणक फलन
Logarithmic series	लघुगणक श्रेणी
Logical	तर्क संगति
Lunar month	चान्द्र मास

M

Magnitude	परिमाण
Manipulation	क्रिया कौशल
Mathematical Induction	गणितीय निगमन
Mathematical deduction	गणितीय आगम
Matrix	आव्यूह/मैट्रिक्स
Mean	माध्य

Middle term	मध्यपद
Minimum	न्यूनतम
Minor	लघु
Miscellaneous	विविध
Modulus	मापांक
More rapidly convergent	शीघ्रतर अभिसारी

N

Napier	नेपियर
Neglect	उपेक्षा करना
Newton's laws of motion	न्यूटन के गति-नियम
Newton's method of approximation	न्यूटन की सन्निकटन-विधि
Non-convergent	अ-अभिसारी
Non-singular matrix	अविचित्र आव्यूह
Notation	संकेतन
Note	नोट, टिप्पणी
Numerator	अंश
Numerical	संख्यात्मक

O

Observation	प्रेक्षा
Odd	विषम
Opposite	अभिमुख
Operator	कारक
Order	कोटि
Ordinary matrix	अविचित्र आव्यूह
Oscillate	दोलन करना
Oscillatory series	दोलायमान श्रेणी

P

Pair	युगल
Particular	विशिष्ट, विशेष

Perspective drawing	संदर्श-रेखण
Polynomial	बहुपद
Power or degree	घात
Preceding term	पूर्वगत पद
Preface	प्रक्कथन
Preliminary	प्रारम्भिक
Preposition	साध्य
Progression	श्रेढी
Proper fraction	उचित भिन्न
Property	गुणधर्म
Purpose	अभिप्राय

Q

Quantity	राशि
Quadratic equation	द्विघात समीकरण
Quod erat demonstrandum	इति सिद्धम्
Quod erat fanciendum	इति कृतम्
Quotient	भागफल

R

Raabe's test	राबे-परीक्षा
Raise	उच्च करना
Rational	परिमेय
Rational integral algebraic equation	परिमेय पूर्ण सांख्यिक बीजीयं समीकरण
Rationalisation	परिमेयकरण
Ratio test	अनुपात परीक्षा
Reciprocal	व्युत्क्रम
Re-arrangement	पुनर्विन्यास
Recurring series	आवर्ती श्रेणी

Related matrix	संबंधित आव्यूह
Repeated	पुनरावृत्त
Repeatition	पुनरावृत्ति
Represent	निरूपित करना
Representative	प्रतिनिधि
Representation	निरूपण
Required	वांछित
Resolve	विघटन या खंडन करना
Resolution	खंडन
Respectively	क्रमशः
Reversed	प्रतिलोम, उत्क्रमिक
Reversible	उत्क्रमणीय
Right hand side	दक्षिण पक्षीय
Root	मूल
Round bracket	धनु कोष्ठक

S

Same	समरूप
Satisfy	पारित करना
Scalar matrix	अदिश आव्यूह
Scale of relation	संबंध मापनी
Second order	द्वितीय क्रम
Separately	प्रथकतः
Sequence	अनुक्रमण
Series	श्रेणी
Set	कुलक/समुच्चय
Similar	समरूप
Simple continued fraction	सरल वितत भिन्न
Simultaneous equation	युगपत् समीकरण
Sine	ज्या
Single	एकल

Singular matrix	एकक आव्यूह
Small bracket	लघु कोष्ठक
Solved example	साधित उदाहरण
Space	अवकाश
Square bracket	गुरु कोष्ठक
Square matrix	वर्ग आव्यूह
Square structure	वर्ग संरचना
Standard form	मानक रूप
Sub-matrix	उप-आव्यूह
Substitute	प्रतिस्थापन करना
Successive	क्रमिक
Successive diminution	क्रमिक ह्रास
Successively	उत्तरोत्तर
Suffix	अनुबंध
Supplementary	पूरक
Surd	करणी
Symmetric function	सममित फलन
Synthetic division	संश्लेषात्मक भाजन

T

Taylor's expansion	टेलर का विस्तार
Taylor's series	टेलर-श्रेणी
Technical terminology	पारिभाषिक शब्दावली
Technique	तकनीक
Tend	प्रवृत्त होना
Term	पद
Terminating decimal	सांत दशमलव
Test	परीक्षा
Theorem	प्रमेय
Theoretical work	सैद्धांतिक कार्य
Theory of equations	समीकरण-सिद्धांत

Three-dimensional	त्रिविमितीय
Trial and divisor	परीक्षण और भाजक
Trial and error	परीक्षण और चूक
Transform	रूपांतरित करना
Transformation	रूपांतरण
Transposition	पक्षांतरण
Tropical year	सायन वर्ष
Two-dimensional	द्विविमितीय

U

Unique	अनन्य
Unitary	एकात्मक
Unit matrix	एकक आव्यूह
Unknown	अज्ञात

V

Vandermonde	वॉण्डर मोण्ड
Variable	चर
Verify	सत्यापन करना

W

Weierstrass	वायर्स्ट्रास

———